♦ Correction du sujet du concours « Agro-Véto » – Voie A-TB – 2018

Exercice d'algèbre

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}^2}$ donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}}$.

2. La matrice M est une matrice symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

3. a. Pour tout réel λ,

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff (2-\lambda)^2 = 1 \iff 2-\lambda = 1 \text{ ou } 2-\lambda = -1 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \text{ est } \{1\,;3\}}$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1.$$

Ainsi, $\det(M - \lambda I_2) = 0$ si et seulement si $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$ c'est-à-dire, d'après la question précédente, si et seulement si $\lambda \in \{1\,;3\}$.
Comme les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M - \lambda I_2) = 0$, on conclut que le spectre de f est $\text{Sp}(f) = \{1\,;3\}$.

4. a. Étant donné que

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

on a $\boxed{f(e_1) = (3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}})}$.
De même,

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

on a $\boxed{f(e_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$.
On remarque que $f(e_1) = 3e_1$ et $f(e_2) = e_2$ donc, comme ces vecteurs sont non nuls, $\underline{e_1 \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur 3 et } e_2 \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur 1}}$.

b. Comme $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, $\boxed{e_1 \text{ et } e_2 \text{ sont orthogonaux}}$. De plus, $\|e_1\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\|e_1\| = 1}$ et $\|e_2\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\|e_2\| = 1}$.
Ainsi, (e_1, e_2) est une famille orthonormée donc, par théorème, (e_1, e_2) est libre. Ainsi, (e_1, e_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donc $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

c. Sachant que $f(e_1) = 3e_1$ et $f(e_2) = e_2$, la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On a $u \cdot e_1 = x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\boxed{u \cdot e_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}}$ et $u \cdot e_2 = x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times (-\frac{1}{\sqrt{2}})$ donc $\boxed{u \cdot e_2 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}}$.

Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, par propriété, les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont $(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$.

6. **a.** Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée, $\|u\|^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2$ donc $\boxed{\|u\|^2 = a^2 + b^2}$ (l'expression de la norme étant indépendante de la base orthonormée choisie).

b. Comme les coordonnées de $u = ae_1 + be_2$, $f(u) = f(ae_1 + be_2) = af(e_1) + bf(e_2) = a(3e_1) + be_2 = (3a)e_1 + be_2$. Dès lors, $\|f(u)\|^2 = \sqrt{(3a)^2 + b^2}^2$ i.e. $\boxed{\|f(u)\|^2 = 9a^2 + b^2}$.

c. D'une part, $\|f(u)\|^2 = 9a^2 + b^2 = 8a^2 + a^2 + b^2 = 8a^2 + \|u\|^2$ donc, comme $8a^2 \geqslant 0$, $\|f(u)\|^2 \geqslant \|u\|^2$. D'autre part, $9\|u\|^2 = 9(a^2+b^2) = 9a^2 + 9b^2 = 9a^2 + b^2 + 8b^2 = \|f(u)\|^2 + 8b^2$ et, de même, $9\|u\|^2 \geqslant \|f(u)\|^2$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{\|u\|^2 \leqslant \|f(u)\|^2 \leqslant 9\|u\|^2}$.

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x, y)$. En utilisant les coordonnées dans la base canonique, $\|u\|^2 = x^2 + y^2$, $\|f(u)\|^2 = \sqrt{(2x+1)^2 + (x+2y)^2}^2 = (2x+1)^2 + (x+2y)^2$ et $9\|u\|^2 = 9(x^2+y^2) = 9x^2 + 9y^2$ donc l'inégalité précédente donne

$$\boxed{x^2 + y^2 \leqslant (2x+1)^2 + (x+2y)^2 \leqslant 9x^2 + 9y^2}.$$

8. **a.** D'après la question 7, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(2x+y)^2 + (x+2y)^2 \geqslant 0$ donc $(2x+y)^2 + (x+2y)^2 - (x^2+y^2) \geqslant 0$ i.e., $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G(x,y) \geqslant 0}$.

b. <u>Première méthode.</u> La question précédente montre que G est minorée par 0. De plus, $G(0, 0) = 0$ donc 0 est le minimum de G sur $\mathbb{R}^2$. En outre, pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = 0$ si et seulement si l'inégalité de gauche de la question 7 est une égalité i.e. si et seulement si l'inégalité de gauche de la question 6.c. est une égalité. Or, on a montré cette égalité en observant que $\|f(u)\|^2 = 8a^2 + \|u\|^2 \geqslant \|u\|^2$. Ainsi, il y a égalité si et seulement si $8a^2 = 0$ i.e. $a = 0$. Or, par définition, $u = ae_1 + be_2$ donc il y a égalité si et seulement si $u = be_2$ i.e. u appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1. Or, ce sous-espace est la droite vectorielle engendrée par $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ qui est aussi

$$\text{Vect}\{(1,-1)\} = \{x(1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$$

Ainsi, on conclut que <u>l'ensembe des points de $\mathbb{R}^2$ où G atteint son minimum est bien $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$</u>.

<u>Seconde méthode.</u> La fonction G est dérivable par rapport à x et à y et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 2 \times 2 \times (2x+y) + 2 \times (x+2y) - 2x = 8x + 8y = 8(x+y)$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 2 \times (2x+y) + 2 \times 2 \times (x+2y) - 2y = 8x + 8y = 8(x+y)$$

Ainsi, les points critiques sont les vecteurs $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$. Si G admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ alors ce minimum est un point critique donc appartient à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$. Or, pour un tel vecteur (x, y), $y = -x$ donc

$$G(x,y) = (2x-x)^2 + (x-2x)^2 - (x^2 + (-x)^2) = x^2 + (-x)^2 - x^2 - (-x)^2 = 0.$$

Or, on sait d'après la question précédente que 0 est un minorant de G sur $\mathbb{R}^2$ donc on conclut que 0 est le minimum de G sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il atteint en tout vecteur appartenant à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$.

Exercice d'analyse

Voir Devoir à la maison n°5 – Exercice 1

Exercice de probabilité

A. Étude de D dans des cas particuliers

1. La puce se déplace le plus à droite possible si elle fait n sauts vers la droite et, dans ce cas, $\boxed{\text{elle se retrouve sur la case numéro } n}$.

2. a. L'évènement $(D=0)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°0 après 2 sauts », l'évènement $(D=1)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°1 après deux sauts » et l'évènement $(D=2)$ signifie : « la puce se trouve sur la case n°2 après 2 sauts ».

Leurs probabilités sont $\boxed{\mathbf{P}(D=0) = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}(D=1) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(D=2) = \frac{1}{4}}$.

b. De même, $\boxed{\mathbf{P}(D=-1) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(D=-2) = \frac{1}{4}}$.

c. Ainsi,

$$\mathbf{E}(D) = \sum_{k=-2}^{2} k\mathbf{P}(D=k) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(D) = 0}$. Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(D^2) = \sum_{k=-2}^{2} k^2\mathbf{P}(D=k) = (-2)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 2$$

donc, par la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(D) = \mathbf{E}(D^2) - \mathbf{E}(D)^2 = 2 - 0^2$ i.e. $\boxed{\mathbf{V}(D) = 2}$.

3. Si $n=3$ alors $D(\Omega) = \{-3,-1,1,3\}$ et la loi de D est donnée par le tableau suivant :

k	-3	-1	1	3
$\mathbf{P}(D=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B. Étude de D dans la cas général

1. Chaque saut est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ en prenant comme succès « la puce effectue un saut vers la droite ». Comme les sauts sont indépendants, la variable aléatoire $\boxed{X \text{ qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale } \mathscr{B}(n, \tfrac{1}{2})}$.

2. Il y a en tout n sauts donc $X+Y=n$ et ainsi $\boxed{Y = n - X}$.

3. La puce effectue X pas vers gauche et Y pas vers la droite donc $D = X \times 1 + Y \times (-1)$. Or, on a vu que $Y = n-X$ donc $D = X + (n-X) \times (-1) = X - n + X$ i.e. $\boxed{D = 2X - n}$.

4. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$, $\mathbf{E}(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(D) = 2\mathbf{E}(X) - n$ donc $\boxed{\mathbf{E}(D) = 0}$. Ainsi, la valeur moyenne de la case finale est 0, ce qui traduit la symétrie de la situation par rapport à cette case.
Par homogénéité de la variance, $\mathbf{V}(D) = 2^2\mathbf{V}(X)$ donc $\boxed{\mathbf{V}(D) = n}$.

C. Étude de D dans un autre cas

1. D'après l'énoncé, $\boxed{a_1 = \frac{2}{3}}$.

2. a. D'après l'énoncé, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k) = \frac{2}{3}$.

b. En particulier, on a donc $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{3}$. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1^c) = \frac{1}{3}$. De plus, les évènements A_1 et A_1^c constituent un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(A_1^c)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1^c) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(A_2) = \frac{5}{9}}$.

c. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme A_k et A_k^c forment un système complet d'évènements, ar la formule des probabilités totales,

$$a_{k+1} = \mathbf{P}(A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k) + \mathbf{P}(A_k^c)\mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k^c) = a_k \times \frac{2}{3} + (1 - a_k) \times \frac{1}{3}$$

i.e. $\boxed{a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}}$.

3. a. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors,

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}a_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(a_k - \frac{1}{2}\right)$$

donc $\boxed{b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k}$.

b. Ainsi, (b_k) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = b_1 \times (\frac{1}{3})^{k-1}$. Or, $b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ b_k = \frac{1}{6} \times (\frac{1}{3})^{k-1}}$.

c. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $b_k = a_k - \frac{1}{2}$ donc $a_k = b_k + \frac{1}{2}$. Grâce au résultat de la question précédente, on conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \frac{1}{6} \times (\frac{1}{3})^{k-1} + \frac{1}{2}}$.

4. a. Par définition, $\boxed{Z_k(\Omega) = \{-1\,;1\}}$.

b. On déduit de la question **3.c.** que $\boxed{\mathbf{P}(Z_k = 1) = a_k = \frac{1}{6} \times (\frac{1}{3})^{k-1} + \frac{1}{2}}$ et, par suite, $\boxed{\mathbf{P}(Z_k = -1) = 1 - \mathbf{P}(Z_k = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times (\frac{1}{3})^{k-1}}$.
On en déduit que

$$\mathbf{E}(Z_k) = 1 \times \left(\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\right) + (-1) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = 2 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(Z_k) = (\frac{1}{3})^k}$.

5. La variable Z_k vaut 1 si la puce fait un pas vers la droite au k-ème saut et -1 si elle fait un pas vers la gauche donc Z_k correspond exactement au déplacement de case au k-ème saut. Ainsi, $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ correspond au déplacement total en partant de 0 donc à la case finale de la puce. Ainsi, $\boxed{D = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}$.

6. Par linéarité de l'espérance, on conclut que

$$\mathbf{E}(D) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{E}(D) = \frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^n\right]}$.