⧫ Correction du sujet du concours « Agro-Véto » – Option Biochimie-Biologie – 2005

Partie A

1. a. Notons A : « La vache est de type A » et L : « la vache produit du lait en hiver ». Comme A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(L \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(L \mid \overline{A}) = \frac{200}{500} \times 0{,}8 + \frac{300}{500} \times 0{,}7$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(L) = 0{,}74 = \frac{37}{50}}$.

b. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(A \mid L) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(L \mid A)}{\mathbf{P}(L)} = \frac{\frac{200}{500} \times 0{,}8}{\frac{37}{50}}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(L) = \frac{16}{37}}$.

2. a. N représente le nombre total de vaches produisant du lait pendant l'hiver considéré.

b. Le fait, pour une vache donnée, de produit du lait est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,8 pour le type A et 0,7 pour le type B. Ainsi, par indépendance, la variable aléatoire N_A qui compte le nombre de succès pour la type A suit une loi binomiale $\mathscr{B}(200, 0{,}8)$ et la variable aléatoire N_B qui compte le nombre de succès pour la type B suit une loi binomiale $\mathscr{B}(300, 0{,}7)$.

c. Le nombre moyen de vaches produisant du lait est $\mathbf{E}(N)$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que ce nombre est $\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}(N_A) + \mathbf{E}(N_B) = 200 \times 0{,}8 + 300 \times 0{,}7$ c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{E}(N) = 370}$.

d. Notons D_A la dépense journalière pour les vaches de type A et D_B celle pour les vaches de type B. Alors, $D_A = 4N_A$ et $D_B = 3D_B$ donc, par linéarité de l'espérance, la dépense journalière moyenne est

$$\mathbf{E}(D_A + D_B) = \mathbf{E}(D_A) + \mathbf{E}(D_B) = 4\mathbf{E}(N_A) + 3\mathbf{E}(N_B) = 4 \times 300 \times 0{,}8 + 3 \times 200 \times 0{,}3$$

soit $\boxed{\text{une dépense journalière moyenne de 1270 euros}}$.

Partie B

1. a. Comme le premier hangar est choisi au hasard, $p_1 = \frac{1}{2}$.

b. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n : « Choisir le hangar H le jour n ». Comme H_1 et $\overline{H_1}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$p_2 = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(H_2 \mid H_1) + \mathbf{P}(\overline{H_1})\mathbf{P}(H_2 \mid \overline{H_1}) = \frac{1}{2} \times 0{,}5 + \frac{1}{2} \times 0{,}4$$

donc $\boxed{p_2 = 0{,}45}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme H_n et $\overline{H_n}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbf{P}(H_{n+1}) &= \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(H_{n+1} \mid H_n) + \mathbf{P}(\overline{H_n})\mathbf{P}(H_{n+1} \mid \overline{H_n}) \\ &= p_n \times 0{,}5 + (1 - p_n) \times 0{,}4 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}4p_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}4}$.

3. a. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{4}{9}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{9} = \frac{1}{10}p_n + \frac{2}{5} - \frac{4}{9} = \frac{1}{10}p_n - \frac{2}{45} = \frac{1}{10}\left(p_n - \frac{4}{9}\right)$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times (\frac{1}{10})^{n-1}$. Or, $u_1 = p_1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{18}(\frac{1}{10})^{n-1}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{4}{9}$ donc $p_n = u_n + \frac{4}{9}$. On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{18}(\frac{1}{10})^{n-1} + \frac{4}{9}}$.

b. Comme $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{10})^{n-1} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{4}{9}}$.

Partie C

1. Le nombre moyen d'incidents est $\boxed{\mathbf{E}(N) = 4}$.

2. La probabilité d'avoir au moins 2 incidents est

$$\mathbf{P}(N \geqslant 2) = 1 - \mathbf{P}(N \leqslant 1) = 1 - \left(\frac{4^0}{0!}\mathrm{e}^{-4} + \frac{4^1}{1!}\mathrm{e}^{-4}\right)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(N \geqslant 2) = 1 - 5\mathrm{e}^{-4}}$.

3. a. Le nombre d'incidents qui nécessitent des soins est inférieur ou égal au nombre d'incidents donc, si $k > n$, $\mathbf{P}(X = k \mid N = n) = 0$. De plus, si $(N = n)$ avec $n \geqslant k$, alors chaque incident est une épreuve de Bernoulli en prenant comme succès « l'incident nécessite des soins » donc, par indépendance, la loi conditionnelle de X sachant k est une loi binomiale de paramètres n et 0,05. Ainsi, dans ce cas, $\mathbf{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} \times 0{,}05^k \times 0{,}95^{n-k}$.

On conclut que $\boxed{\mathbf{P}(X = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \times 0{,}05^k \times 0{,}95^{n-k} & \text{si } n \geqslant k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $(\{N = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(X=k \mid N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{n!}\mathrm{e}^{-4} \times \binom{n}{k} \times 0{,}05^k \times 0{,}95^{n-k} \qquad (\text{ car } \mathbf{P}(X=k \mid N=n)=0 \text{ si } n<k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{n!}\mathrm{e}^{-4} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times 0{,}05^k \times 0{,}95^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-4}}{k!} \times 0{,}05^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{(n-k)!} \times 0{,}95^{n-k} \\
&\underset{j=n-k}{=} \frac{\mathrm{e}^{-4}}{k!} \times 0{,}05^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4^{j+k}}{j!} \times 0{,}95^j \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-4}}{k!} \times 0{,}05^k \times 4^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4^j \times 0{,}95^j}{j!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-4}}{k!} \times (0{,}05 \times 4)^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(4 \times 0{,}95)^j}{j!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-4}}{k!} \times (0{,}2)^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(3{,}8)^j}{j!} \\
&= \frac{0{,}2^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^{3{,}8}
\end{aligned}
$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{P}(X=k) = \frac{0{,}2^k}{k!}\mathrm{e}^{-0{,}2}}$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson } \mathscr{P}(0{,}2)}$.

Partie D

1. La fonction f est continue par morceaux car elle est nulle en-dehors de $[0\,;12]$ et les fonction $x \longmapsto k\sin(\frac{\pi x}{12})$ est continue sur $[0\,;12]$ comme composée de fonctions continues. De plus, f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k \geqslant 0$ car si $x \in [0\,;12]$, $\frac{\pi x}{12} \in [0\,;\pi]$ et la fonction sinus est positive sur $[0\,;\pi]$.
De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{12} k\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{12k}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right]_0^{12} \\
&= -\frac{12k}{\pi}\cos(\pi) - \left(-\frac{12k}{\pi}\cos(0)\right) \\
&= -\frac{12k}{\pi} \times (-1) + \frac{12k}{\pi} \times 1 \\
&= \frac{24k}{\pi}
\end{aligned}
$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $\dfrac{24k}{\pi} = 1$ i.e. $\boxed{k = \dfrac{\pi}{24}}$.

2. a. La fonction de répartition F de D est définie, pour tout réel x, par

$$F(x) = \mathbf{P}(D \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Distinguons 3 cas.
Si $x < 0$ alors $f(t) = 0$ pour tout $t \leqslant x$ donc

$$F(x) == \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0.$$

Si $x \in [0\,;12]$ alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(0)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \end{aligned}$$

Si $x > 12$ alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{12} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{12}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{12} \frac{\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\mathrm{d}t + \int_{12}^{x} 0\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) & \text{si } x \in [0\,;12] \\ 1 & \text{si } x > 12 \end{cases}}$$

b. Comme f est nulle en-dehors du segment $[0\,;12]$, D admet une espérance et

$$\mathbf{E}(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{12} x \times \frac{\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\mathrm{d}x$$

Considérons les fonctions

$$u : x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad v : x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

de sorte que

$$u' : x \longmapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : x \longmapsto \frac{\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

Alors, u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(D) &= \left[x \times \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right)\right]_0^{12} - \int_{0}^{12} 1 \times \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= 12 \times \left(-\frac{1}{2}\cos(\pi)\right) - 0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\mathrm{d}x \\ &= 6 + \frac{1}{2}\left[\frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right]_0^{12} \\ &= 6 + \frac{6}{\pi}\sin(\pi) - \frac{6}{\pi}\sin(0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(D) = 6}$.

3. a. On cherche la probabilité $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{5}(D_i \leqslant 6)\right)$ i.e. comme les D_i sont mutuellement indépendantes

$$\mathbf{P}(D_1 \leqslant 6) \times \mathbf{P}(D_2 \leqslant 6) \times \mathbf{P}(D_3 \leqslant 6) \times \mathbf{P}(D_4 \leqslant 6) \times \mathbf{P}(D_5 \leqslant 6).$$

Or, comme chaque D_i suit la même loi que D, cette probabilité est donc égale à $\mathbf{P}(D \leqslant 6)^5 = F(6)^5$.
Or, $F(6) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi \times 6}{12}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc <u>la probabilité que le temps d'examen soit inférieur ou égal à 6 minutes pour chacune des 5 vaches est</u> $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$.

b. De la même façon,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{5}(D_i \geqslant 3)\right) = \mathbf{P}(D \geqslant 3)^5 = [1 - \mathbf{P}(D < 3)]^5 .$$

Comme D est une variable à densité,

$$\mathbf{P}(D < 3) = \mathbf{P}(D \leqslant 3) = F(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

donc <u>la probabilité que le temps d'examen soit inférieur à 3 minutes pour chacune des 5 vaches est</u> $\left(1 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)^5 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^5$