

◆ Révisions – mars 2026

Algèbre (2020)

Si a est un nombre réel, on note $M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$. On note f_a l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice M_a .

Par ailleurs, on rappelle que $(x; y)$ est un élément de \mathbb{R}^2 , la norme réelle $\|(x; y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la **norme** du vecteur $(x; y)$.

1. Exemples.

a. Calculer M_0 , $M_{\frac{\pi}{2}}$ et M_π . (Autrement dit, calculer M_a dans les cas $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$ et $a = \pi$.)

b. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Donner un réel $a \in [0; 2\pi[$ tel que $A = M_a$.

2. Premières propriétés. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Calculer le déterminant de M_a . L'application f_a est-elle bijective? Que dire du noyau de f_a ?

b. Calculer $f_a((1; 0))$ et $f_a((0; 1))$. En déduire $\|f_a((1; 0))\|$ et $\|f_a((0; 1))\|$.

c. Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que le vecteur $f_a((x; y))$ et le vecteur $(x; y)$ ont la même norme.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f_a et $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé.

Montrer que $\|f_a(u)\| = |\lambda| \times \|u\|$. En déduire que λ vaut soit 1, soit une autre valeur réelle que l'on précisera.

3. On s'intéresse aux valeurs propres **complexes** de M_a .

a. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Trouver des coefficients α et β **réels**, que l'on exprimera en fonction de a , et vérifiant, pour tout nombre complexe z :

$$(z - e^{ia})(z - e^{-ia}) = z^2 - 2\alpha z + \beta.$$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant de $M_a - \lambda I_2$ vaut $(\lambda - e^{ia})(\lambda - e^{-ia})$.

c. Pour quelles valeurs de λ , la matrice $M_a - \lambda I_2$ est-elle *non* inversible?

d. Expliquer pourquoi les valeurs propres (complexes) de M_a sont e^{ia} et e^{-ia} .

4. Application. Existe-t-il un réel a et une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f_a est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$? *Indication : chercher d'abord les valeurs propres de cette matrice.*

Sont-elles de la forme e^{ia} et e^{-ia} ?

5. Si a et b sont deux nombres réels, montrer que $M_{a+b} = M_a M_b$.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un réel $a \in]0; 2\pi[$ tel que $M_a^n = I_2$. On exprimera un tel réel a en fonction de n et de π .

Algèbre (2023)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 et -2 sont valeurs propres de A .
2. Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Calculer explicitement P^{-1} .
5. Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P , D , P^{-1} et n . Justifier en rédigeant une récurrence.
6. Calculer explicitement les quatre coefficients de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On se donne à présent la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

7. Calculer u_2 et u_3 .
8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs AX_n et X_{n+1} .
9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A , X_0 et n .
10. Donner enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n .

Algèbre (2018)

Dans cet exercice, on considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé.

On rappelle que si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , alors on définit le produit scalaire $u \cdot v$ et la norme $\|u\|$ par :

$$u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Calculer le produit $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.
2. Montrer, sans faire aucun calcul, que la matrice M est diagonalisable.
3. **a.** Résoudre l'équation $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.
b. Donner les valeurs propres de f .
4. On définit les vecteurs $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
a. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que remarque-t-on ?
b. Montrer que les deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux et calculer leur norme. Montrer aussi que la famille (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
c. Montrer que la matrice représentative de f dans la base (e_1, e_2) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . Calculer $u \cdot e_1$ et $u \cdot e_2$ et en déduire, en fonction de x et y , les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) .
6. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de \mathbb{R}^2 . Notons (a, b) ses coordonnées dans la base (e_1, e_2) . On a donc $u = ae_1 + be_2$.
 - a. Montrer que $\|u\|^2 = a^2 + b^2$.
 - b. Montrer que $\|f(u)\| = 9a^2 + b^2$.
 - c. Montrer enfin que l'on a :

$$\|u\|^2 \leq \|f(u)\|^2 \leq 9\|u\|^2.$$

7. Déduire de ce qui précède que, pour tous réels x et y , on a :

$$x^2 + y^2 \leq (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 \leq 9x^2 + 9y^2.$$

8. On note G la fonction de deux variables définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$G(x, y) = (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (x^2 + y^2).$$

- a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G(x, y) \geq 0$.
- b. Montrer que G admet sur \mathbb{R}^2 un minimum, et que l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 où ce minimum est atteint est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}.$$

Analyse (2024)

Partie A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Calculer $f(1)$.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donner son signe.
 - b. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. a. Déterminer les limites de f en 0 et en ∞ .
 b. En déduire que f est une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = n$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on note u_n .
 b. Donner u_1 .

Dans la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à déterminer explicitement u_n . On notera de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n vérifie l'égalité $f(u_n) = n$, soit :

$$u_n + \ln(u_n) = n \quad (\star),$$

Partie B. Étude de la suite (u_n)

1. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
2. On admet que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln(x) \leq x$.
 - a. En utilisant la relation (\star) , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{n}{2}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Analyse (2020)

On rappelle le résultat suivant :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et une fonction u définie et dérivable sur I . Si on a $u'(x) = 0$ pour tout réel x de I , alors u est constante sur I .

On rappelle que la fonction arctangente, notée \arctan , est la bijection réciproque de la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$. C'est une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} , et on a la relation pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Rappeler la valeur de $\arctan(0)$ et de $\arctan(1)$.
2. Rappeler la valeur de la limite de \arctan en $+\infty$.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur \mathbb{R}^* . Calculer la dérivée de la fonction f .

Attention, on rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables, la dérivée de leur composée est donnée par la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.

4. Calculer, pour tout x non nul, $\arctan'(x) + f'(x)$.
5. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. On précisera soigneusement les théorèmes employés.
6. Si x est strictement négatif, donner la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. On rappelle que \arctan est impaire.
7. Le résultat rappelé au début de l'énoncé reste-t-il vrai si I n'est pas un intervalle ?
8. Calculer la limite de $\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$ lorsque x tend vers 0.
9. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$.
10. Donner alors un équivalent **très simple** de la suite (u_n) , de terme général $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

Analyse (2008)

1. Ensemble de définition

- a. Soit x appartenant à $]1; +\infty[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.
- b. Soit x appartenant à $]0; 1[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.

Nous pouvons ainsi définir une fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

2. Étude de la dérivabilité

- a. Justifier l'existence d'une primitive H de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]1; +\infty[$, puis exprimer pour tout réel x appartenant à $]1; +\infty[$, $f(x)$ en fonction de $H(x^2)$ et $H(x)$. En déduire que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et calculer f' . Quel est le sens de variations de f sur $]1; +\infty[$?
- b. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et calculer f' . Quel est le sens de variations de f sur $]0; 1[$?

3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. Étude en 0 par valeurs supérieures

Soit x appartenant à $]0; 1[$. Montrer que, pour tout t appartenant à $[x^2; x]$,

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

et en déduire que

$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.$$

Montrer alors que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en 0 de f ainsi prolongée.

La fonction f ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.

À l'aide de l'encadrement précédent, montrer que $\frac{f(x)}{x}$ a pour limite 0 en 0.

Que peut-on en déduire sur la fonction f ? Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Étude en l'infini

En s'inspirant de la méthode décrite en a., pour tout réel x appartenant à $]1; +\infty[$, encadrer $f(x)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit x appartenant à $]1; +\infty[$. Montrer que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(2)$.

En remarquant que $f(x) = \int_x^{x^2} t \times \frac{dt}{t \ln(t)}$, montrer que $x \ln(2) \leq f(x) \leq x^2 \ln(2)$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de f en 1 par valeurs supérieures.

d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Par un travail similaire à celui de la question précédente, montrer que $f(x)$ a pour limite $\ln(2)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

e. Prolongement par continuité de f en 1

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

La fonction ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.

Probabilités (2013)

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D2 à 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

— nous commençons par jeter la pièce,

- si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D1, sinon nous choisissons le dé D2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ensuite, nous jetons plusieurs fois le dé choisi et, pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

- D1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D1 »,
- D2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D2 »,
- pour tout entier naturel non nul n , R_n est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}(D1)$? $\mathbf{P}(D2)$?

Montrer que $\{D1, D2\}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Soit n appartenant à \mathbb{N}^* . Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}_{D1}(R_n)$? de $\mathbf{P}_{D2}(R_n)$?

3. Calculer $\mathbf{P}(R_1)$.

4. Établir un lien entre les probabilités $\mathbf{P}_{D1}(R_1)$, $\mathbf{P}_{D1}(R_2)$ et $\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2)$.

En déduire la valeur de $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire, pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , la valeur de $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$.

6. Calculer $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(D1)$ puis, de manière générale, pour tout entier naturel non nul n , montrer que :

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit n appartenant à \mathbb{N}^* . Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1 ou sur le fait d'avoir un face rouge au lancer suivant ?

Probabilités (2020)

Si l'on dispose de k jetons que l'on place dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie 1. est indépendante des suivantes.

1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes a et b .

Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a , et une chance sur deux d'être dans l'urne b . Il en est de même pour chacun des quatre autres jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a .

1. Reconnaître la loi de X .
2. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X , l'évènement « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'évènement « L'urne b est vide ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement « L'un des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas général de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de **trois** urnes appelées a , b et c .

De même que précédemment, chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a , un chance sur trois d'être dans l'urne b , et une chance sur trois d'être dans l'urne c .

2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ et E_i l'évènement « Le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'évènement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'évènement E_i .
2. Soit V_a l'évènement « L'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des fonctions E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 .
3. En déduire que $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$.

Par symétrie du problème, on pourra admettre que la probabilité $P(V_b)$ que b soit vide et que la probabilité $P(V_c)$ que c soit vide ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N .

3) Calcul de $P(N = 2)$ et de $P(N = 3)$

1. Que signifie, en français, l'évènement $(N = 3)$? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*
2. Que signifie, en français, l'évènement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.
On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'évènement $(N = 2)$ en fonction d'évènements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

4) Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N .

1. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (Z_c vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon). Reconnaître la loi et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a, Z_b et Z_c .
2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c .
3. Calculer alors l'espérance de N .

5) Loi de N

1. Montrer que $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$.
2. En déduire la valeur de $P(N = 1)$.
3. Donner enfin la loi de la variable aléatoire N . On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES (Option Biochimie-Biologie – 2005)

Durée : 2 heures

Les différentes parties du problème sont indépendantes.

N.B. – Les candidats sont priés :

1. D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement, de respecter les notations de l'énoncé.
2. De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.
3. De donner les résultats encadrés.

Les vaches constituant le cheptel d'une grosse exploitation agricole sont de deux types, le type A et le type B.

Partie A

La probabilité qu'une vache de type A produise du lait en hiver est égale à 0,8 et la probabilité qu'une vache de type B produise du lait en hiver est de 0,7. La production de lait en hiver est indépendante d'un animal à l'autre quel que soit son type.

Dans cette partie, le cheptel est formé de 200 vaches de type A et de 300 vaches de type B.

1. On choisit une bête au hasard dans ce cheptel.
 - a. Quelle est la probabilité qu'elle produise du lait en hiver ?
 - b. La vache produit du lait en hiver, quelle est la probabilité qu'elle soit du type A ?
2. On note N_A le nombre de vaches de type A du cheptel qui produisent du lait un hiver donné et N_B le nombre de vaches de type B du cheptel qui produisent du lait durant ce même hiver. On note $N = N_A + N_B$.
 - a. Que représente N ?
 - b. Donner les lois de N_A et N_B .
 - c. Quel est le nombre moyen de vaches du cheptel produisant du lait l'hiver considéré ?
 - d. Pour chaque vache de type A produisant du lait en hiver, il faut compter une dépense de 4 euros par jour pour des compléments alimentaires ; pour une vache de type B, cette dépense journalière est de 3 euros.
Pour le cheptel considéré, quelle est la dépense journalière moyenne à prévoir en compléments alimentaires pour les vaches produisant du lait en hiver ?

PARTIE B

L'exploitation dispose de deux hangars H et H' pour le stockage du foin. Chaque jour, on cherche le foin nécessaire dans l'un des deux hangars. Pour des raisons techniques, si un jour donné on utilise le hangar H, le lendemain on réutilisera ce même hangar avec une probabilité de 0,5 et si, un jour donné, on utilise le hangar H', la probabilité d'utiliser le lendemain le hangar H est égale à 0,4.

On veut analyser l'utilisation des deux hangars sur une longue période ; le premier jour, on choisit un hangar au hasard.

Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité que le hangar H soit utilisé le n -ième jour.

1. **a.** Donner p_1 .
b. Calculer p_2 .
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4$.
3. **a.** Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{4}{9}$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la série.
En déduire la valeur de u_n puis de p_n pour tout entier naturel n non nul.
b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

PARTIE C

Une étude statistique montre que, pour ce cheptel, le nombre d'incidents dans une salle de traite, un jour donné, est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre 4. De plus, cette étude indique que, pour un jour donné, les différents incidents dans la salle de traite sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un incident dans la salle de traite donne lieu à des soins vétérinaires est égale à 0,05.

1. Quel est le nombre moyen d'incidents par jour dans la salle de traite ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir, un jour donné, au moins deux incidents dans la salle de traite ?
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'incidents dans la salle de traite qui, pour un jour donné, nécessitent des soins vétérinaires.
a. On considère deux entiers naturels n et k .
Calculer la probabilité conditionnelle suivante : $P(X = k \mid N = n)$.
On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
b. En déduire la probabilité $P(X = k)$ pour tout entier naturel k .
Quelle est la loi de la variable X ?

PARTIE D

1. On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} k \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) & \text{si } x \in [0; 12], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.

2. La durée, en minutes, d'un examen vétérinaire d'une vache quelconque du cheptel est une variable aléatoire réelle D qui admet f comme densité.
- Déterminer la fonction de répartition de D .
 - Calculer l'espérance mathématique de D .
3. On examine un groupe de cinq vaches, numérotées de 1 à 5. Soit i un entier naturel supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 5 ; la durée, en minutes, de l'examen pour la vache numéro i est une variable aléatoire D_i de même densité que D . Les variables aléatoires D_i sont supposées indépendantes.
- Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit inférieure ou égale à six minutes.
 - Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit au moins égale à trois minutes.

FIN