

# ◆ Révisions – mars 2026

## Algèbre (2020)

Si  $a$  est un nombre réel, on note  $M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ . On note  $f_a$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice  $M_a$ .

Par ailleurs, on rappelle que  $(x; y)$  est un élément de  $\mathbb{R}^2$ , la norme réelle  $\|(x; y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est la **norme** du vecteur  $(x; y)$ .

1. Exemples.

a. Calculer  $M_0$ ,  $M_{\frac{\pi}{2}}$  et  $M_\pi$ . (Autrement dit, calculer  $M_a$  dans les cas  $a = 0$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$  et  $a = \pi$ .)

b. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ . Donner un réel  $a \in [0; 2\pi[$  tel que  $A = M_a$ .

2. Premières propriétés. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

a. Calculer le déterminant de  $M_a$ . L'application  $f_a$  est-elle bijective? Que dire du noyau de  $f_a$ ?

b. Calculer  $f_a((1; 0))$  et  $f_a((0; 1))$ . En déduire  $\|f_a((1; 0))\|$  et  $\|f_a((0; 1))\|$ .

c. Soit  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ . Prouver que le vecteur  $f_a((x; y))$  et le vecteur  $(x; y)$  ont la même norme.

d. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $f_a$  et  $u \in \mathbb{R}^2$  un vecteur propre associé.

Montrer que  $\|f_a(u)\| = |\lambda| \times \|u\|$ . En déduire que  $\lambda$  vaut soit 1, soit une autre valeur réelle que l'on précisera.

3. On s'intéresse aux valeurs propres **complexes** de  $M_a$ .

a. Fixons  $a \in \mathbb{R}$ . Trouver des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  **réels**, que l'on exprimera en fonction de  $a$ , et vérifiant, pour tout nombre complexe  $z$  :

$$(z - e^{ia})(z - e^{-ia}) = z^2 - 2\alpha z + \beta.$$

b. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que le déterminant de  $M_a - \lambda I_2$  vaut  $(\lambda - e^{ia})(\lambda - e^{-ia})$ .

c. Pour quelles valeurs de  $\lambda$ , la matrice  $M_a - \lambda I_2$  est-elle *non* inversible?

d. Expliquer pourquoi les valeurs propres (complexes) de  $M_a$  sont  $e^{ia}$  et  $e^{-ia}$ .

4. Application. Existe-t-il un réel  $a$  et une base de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle la matrice de  $f_a$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ? *Indication : chercher d'abord les valeurs propres de cette matrice.*

*Sont-elles de la forme  $e^{ia}$  et  $e^{-ia}$ ?*

5. Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels, montrer que  $M_{a+b} = M_a M_b$ .

6. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un réel  $a \in ]0; 2\pi[$  tel que  $M_a^n = I_2$ . On exprimera un tel réel  $a$  en fonction de  $n$  et de  $\pi$ .

**Solution.**

1. a. Par définition,  $M_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  c'est-à-dire  $M_0 = I_2$ ,  $M_{\frac{\pi}{2}} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_\pi = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire  $M_\pi = -I_2$ .

- b. On cherche un réel  $a$  tel que  $\cos(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ainsi,  $a = \frac{\pi}{4}$  convient donc  $A = M_{\frac{\pi}{4}}$ .
2. a.  $\det(M_a) = \cos^2(a) - (-\sin^2(a)) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ . Comme  $\det(M_a) \neq 0$ ,  $f_a$  est bijective. Elle est en particulier injective donc  $\ker f_a = \{(0; 0)\}$ .
- b.  $f_a((1; 0)) = (\cos(a); \sin(a))$  et  $f_a((0; 1)) = (-\sin(a); \cos(a))$ . On en déduit que  $\|f_a((1; 0))\| = \sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \sqrt{1} = 1$  et  $\|f_a((0; 1))\| = \sqrt{\sin^2(a) + \cos^2(a)} = \sqrt{1} = 1$ .
- c. Par définition,

$$f_a((x; y)) = (\cos(a)x - \sin(a)y; + \sin(a)x + \cos(a)y)$$

donc

$$\begin{aligned} \|f_a(x)\| &= \sqrt{(\cos(a)x - \sin(a)y)^2 + (\sin(a)x + \cos(a)y)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(a)x^2 - 2\cos(a)\sin(a)xy + \sin^2(a)y^2 + \sin^2(a)x^2 + 2\sin(a)\cos(a)xy + \cos^2(a)y^2} \\ &= \sqrt{(\cos^2(a) + \sin^2(a))(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Or,  $\|(x; y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  donc  $\|f_a((x; y))\| = \|(x; y)\|$ .

- d. Par définition,  $f_a(u) = \lambda u$  donc  $\|f_a(u)\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$ . Or, d'après la question précédente,  $\|f_a(u)\| = \|u\|$  donc  $\|u\| = |\lambda| \times \|u\|$ . De plus,  $u \neq 0$  donc  $\|u\| \neq 0$  et ainsi, en divisant par  $\|u\|$ , on conclut que  $|\lambda| = 1$  donc  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ .
3. a. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$(z - e^{ia})(z - e^{-ia}) = z^2 - ze^{-ia} - e^{ia}z + e^{ia}e^{-ia} = z^2 - (e^{ia} + e^{-ia})z + e^{i0}$$

Or,  $e^{i0} = 1$  et, par la formule d'Euler,  $e^{ia} + e^{-ia} = 2\cos(a)$  donc

$$(z - e^{ia})(z - e^{-ia}) = z^2 - 2\cos(a)z + 1.$$

Ainsi,  $\alpha = \cos(a)$  et  $\beta = 1$ .

- b. Par définition,

$$\begin{aligned} \det(M_a - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} \cos(a) - \lambda & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) - \lambda \end{vmatrix} = (\cos(a) - \lambda)^2 + \sin^2(a) \\ &= \cos^2(a) - 2\cos(a)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(a) \\ &= \lambda^2 - 2\cos(a)\lambda + 1 \end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente,  $\det(M_a - \lambda I_2) = (\lambda - e^{ia})(\lambda - e^{-ia})$ .

- c. La matrice  $M_a - \lambda I_2$  n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\begin{aligned} \det(M_a - \lambda I_2) = 0 &\iff (\lambda - e^{ia})(\lambda - e^{-ia}) = 0 \iff \lambda - e^{ia} = 0 \text{ ou } \lambda - e^{-ia} = 0 \\ &\iff \lambda = e^{ia} \text{ ou } \lambda = e^{-ia}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $M_a - \lambda I_2$  n'est pas inversible si et seulement si  $\lambda = e^{ia}$  ou  $\lambda = e^{-ia}$ .

- d. Par définition,  $\lambda$  est valeur propre de  $M_a$  si et seulement si  $M_a - \lambda I_2$  n'est pas injective, comme il s'agit d'une matrice carrée, si et seulement si  $M_a - \lambda I_2$  n'est pas inversible. Ainsi, par la question précédente, les valeurs propres complexes de  $M_a$  sont  $e^{ia}$  et  $e^{-ia}$ .
4. Posons  $N = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ . Comme  $N$  est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, c'est-à-dire 5 et  $-4$ . Or,  $|5| = 5$  et, pour tout réel  $a$ ,  $|e^{ia}| = |e^{-ia}| = 1$  donc, quelle que soit la valeur de  $a$ , 5 n'est pas valeur propre de  $M_a$  et donc 5 n'est pas valeur propre de  $f_a$ . Ainsi, il n'existe pas de réel  $a$  et de base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que la matrice de  $f_a$  dans  $\mathcal{B}$  est  $N$ .
5. Par les formules d'addition,

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc  $M_a M_b = M_{a+b}$ .

6. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_a^n = M_{na}$ . Comme  $M_a^0 = I_2$  et  $M_{0a} = M_0 = I_2$ , l'égalité est vraie au rang  $n = 0$ .  
Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons l'égalité vraie au rang  $n = k$ . Alors, d'après la question précédente,

$$M_a^{k+1} = M_a^k M_a = M_{ka} M_a = M_{ka+a} = M_{(k+1)a}$$

donc l'égalité est vraie au rang  $n = k + 1$ .

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_a^n = M_{na}$ .

Dès lors, comme  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques,  $M_{2\pi} = M_0 = I_2$  donc  $M_{\frac{2\pi}{n}}^n = M_{\frac{2\pi}{n} \times n} = M_{2\pi} = I_2$ . Comme  $\frac{2\pi}{n} \in ]0; 2\pi[$ , on conclut que  $a = \frac{2\pi}{n}$  convient.

## Algèbre (2023)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et la matrice  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que 1 et  $-2$  sont valeurs propres de  $A$ .
2. Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner une matrice  $P$  inversible telle que  $D = P^{-1}AP$ .
4. Calculer explicitement  $P^{-1}$ .
5. Si  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $A^n$  en fonction de  $P$ ,  $D$ ,  $P^{-1}$  et  $n$ . Justifier en rédigeant une récurrence.
6. Calculer explicitement les quatre coefficients de  $A^n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

On se donne à présent la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ .

7. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
8. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ . Comparer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les vecteurs  $AX_n$  et  $X_{n+1}$ .
9. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $X_n$  en fonction de  $A$ ,  $X_0$  et  $n$ .
10. Donner enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution.**

1. Posons  $M = A - I_2$ . Alors,  $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  donc  $\det(M) = (-2) \times (-1) - 2 \times 1 = 0$ .  
Ainsi,  $M$  n'est pas inversible donc 1 est valeur propre de  $A$ .

Posons  $N = A - (-2)I_2$ . Alors,  $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  donc  $\det(N) = 1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$ . Ainsi,  $N$  n'est pas inversible donc -2 est valeur propre de  $A$ .

2. On cherche un vecteur  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tel que  $AV = V$  ce qui équivaut à  $MV = 0_2$ . Or,

$$MV = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi, le vecteur  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

On cherche un vecteur  $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tel que  $AW = -2W$  ce qui équivaut à  $NW = 0_2$ .  
Or,

$$NW = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y.$$

Ainsi, le vecteur  $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre -2.

3. Par propriété,  $D = P^{-1}AP$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Comme  $P$  est une matrice  $2 \times 2$  et  $\det(P) = 1 \times 1 - 1 \times (-2) = 3$ ,  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

5. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

Comme  $A^0 = I_2$  et  $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ , l'égalité est vraie au rang  $n = 0$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'égalité est vraie au rang  $n = k$  c'est-à-dire que  $A^k = PD^kP^{-1}$ . Alors, comme  $D = P^{-1}AP$ ,  $A = PDP^{-1}$  donc, par associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^k I_2 DP^{-1} \\ &= PD^k DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang  $n = k + 1$ .

Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $D$  est diagonale,  $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ . On déduit alors des questions précédentes que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-2)^n & 2 - 2(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 2 + (-2)^n \end{pmatrix}.$$

7.  $u_2 = -u_1 + 2u_0 = -1 + 4$  donc  $u_2 = 3$  et  $u_3 = -u_2 + 2u_1 = -3 + 2$  donc  $u_3 = -1$ .  
 8. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$AX_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi, les deux vecteurs  $AX_n$  et  $X_{n+1}$  sont égaux.

9. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .

Comme  $A^0 = I_2$ ,  $A^0 X_0 = X_0$  donc l'égalité est vraie au rang  $n = 0$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'égalité est vraie au rang  $n = k$  c'est-à-dire que  $X_k = A^k X_0$ . Alors, d'après la question précédente,

$$X_{k+1} = AX_k = A(A^k X_0) = (AA^k)X_0 = A^{k+1}X_0$$

donc l'égalité est vraie au rang  $n = k + 1$ .

Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .

10. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-2)^n & 2 - 2(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 2 + (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-2)^n + 4 - 4(-2)^n \\ 1 - (-2)^n + 4 + 2(-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 - 2(-2)^n \\ 5 + (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que  $u_n = \frac{5 + (-2)^n}{3}$ .

*Remarque 1.*

- On vérifie que ce résultat est bien cohérent avec les valeurs de  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  déterminées précédemment :  $\frac{5 + (-2)^0}{3} = \frac{6}{3} = 2 = u_0$ ,  $\frac{5 + (-2)^1}{3} = \frac{2}{3} = 1 = u_1$ ,  $\frac{5 + (-2)^2}{3} = \frac{9}{3} = 3 = u_2$  et  $\frac{5 + (-2)^3}{3} = \frac{-3}{3} = -1 = u_3$ .
- L'égalité montrée dans la question 10 donne également que  $u_{n+1} = \frac{5 - 2(-2)^n}{3}$  ce qui est cohérent car  $\frac{5 - 2(-2)^n}{3} = \frac{5 + (-2)(-2)^n}{3} = \frac{5 + (-2)^{n+1}}{3}$ .

# Algèbre (2018)

Dans cet exercice, on considère la matrice  $M$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé.

On rappelle que si  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , alors on définit le produit scalaire  $u \cdot v$  et la norme  $\|u\|$  par :

$$u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Calculer le produit  $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.
2. Montrer, sans faire aucun calcul, que la matrice  $M$  est diagonalisable.
3. **a.** Résoudre l'équation  $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$ , d'inconnue  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
**b.** Donner les valeurs propres de  $f$ .
4. On définit les vecteurs  $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  et  $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .  
**a.** Calculer  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . Que remarque-t-on ?  
**b.** Montrer que les deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont orthogonaux et calculer leur norme. Montrer aussi que la famille  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .  
**c.** Montrer que la matrice représentative de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soit  $u = (x, y)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Calculer  $u \cdot e_1$  et  $u \cdot e_2$  et en déduire, en fonction de  $x$  et  $y$ , les coordonnées de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2)$ .
6. Soit  $u = (x, y)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Notons  $(a, b)$  ses coordonnées dans la base  $(e_1, e_2)$ . On a donc  $u = ae_1 + be_2$ .  
**a.** Montrer que  $\|u\|^2 = a^2 + b^2$ .  
**b.** Montrer que  $\|f(u)\| = 9a^2 + b^2$ .  
**c.** Montrer enfin que l'on a :

$$\|u\|^2 \leq \|f(u)\|^2 \leq 9\|u\|^2.$$

7. Déduire de ce qui précède que, pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$x^2 + y^2 \leq (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 \leq 9x^2 + 9y^2.$$

8. On note  $G$  la fonction de deux variables définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par :

$$G(x, y) = (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (x^2 + y^2).$$

- a.** Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $G(x, y) \geq 0$ .  
**b.** Montrer que  $G$  admet sur  $\mathbb{R}^2$  un minimum, et que l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  où ce minimum est atteint est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}.$$

**Solution.**

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}^2}$  donc  $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}}$ .
- La matrice  $M$  est une matrice symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral,  $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ .
- a. Pour tout réel  $\lambda$ ,

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \iff (2 - \lambda)^2 = 1 \iff 2 - \lambda = 1 \text{ ou } 2 - \lambda = -1 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Ainsi,  $\boxed{\text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \text{ est } \{1; 3\}}$ .

- b. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1.$$

Ainsi,  $\det(M - \lambda I_2) = 0$  si et seulement si  $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$  c'est-à-dire, d'après la question précédente, si et seulement si  $\lambda \in \{1; 3\}$ .

Comme les valeurs propres de  $M$  sont les réels  $\lambda$  tels que  $\det(M - \lambda I_2) = 0$ , on conclut que le spectre de  $f$  est  $\text{Sp}(f) = \{1; 3\}$ .

- a. Étant donné que

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

on a  $\boxed{f(e_1) = (3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}})}$ .

De même,

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

on a  $\boxed{f(e_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$ .

On remarque que  $f(e_1) = 3e_1$  et  $f(e_2) = -e_2$  donc, comme ces vecteurs sont non nuls,  $e_1$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur 3 et  $e_2$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur 1.

- b. Comme  $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ,  $\boxed{e_1 \text{ et } e_2 \text{ sont orthogonaux}}$ . De plus,  $\|e_1\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$  donc  $\boxed{\|e_1\| = 1}$  et  $\|e_2\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$  donc  $\boxed{\|e_2\| = 1}$ .

Ainsi,  $(e_1, e_2)$  est une famille orthonormée donc, par théorème,  $(e_1, e_2)$  est libre.

Ainsi,  $(e_1, e_2)$  est une famille libre de 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  donc  $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$ .

- c. Sachant que  $f(e_1) = 3e_1$  et  $f(e_2) = -e_2$ , la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2)$  est  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

5. On a  $u \cdot e_1 = x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times \frac{1}{\sqrt{2}}$  donc  $\boxed{u \cdot e_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}}$  et  $u \cdot e_2 = x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times (-\frac{1}{\sqrt{2}})$  donc  $\boxed{u \cdot e_2 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}}$ .

Comme  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ , par propriété, les coordonnées de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2)$  sont  $(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$ .

6. a. Comme  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée,  $\|u\|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2$  donc  $\boxed{\|u\|^2 = a^2 + b^2}$ .

b. Comme les coordonnées de  $u = ae_1 + be_2$ ,  $f(u) = f(ae_1 + be_2) = af(e_1) + bf(e_2) = a(3e_1) + be_2 = (3a)e_1 + be_2$ . Dès lors,  $\|f(u)\|^2 = \sqrt{(3a)^2 + b^2}^2$  i.e.  $\|f(u)\|^2 = 9a^2 + b^2$ .

c. D'une part,  $\|f(u)\|^2 = 9a^2 + b^2 = 8a^2 + a^2 + b^2 = 8a^2 + \|u\|^2$  donc, comme  $8a^2 \geq 0$ ,  $\|f(u)\|^2 \geq \|u\|^2$ . D'autre part,  $9\|u\|^2 = 9(a^2 + b^2) = 9a^2 + 9b^2 = 9a^2 + b^2 + 8b^2 = \|f(u)\|^2 + 8b^2$  et, de même,  $9\|u\|^2 \geq \|f(u)\|^2$ .

Ainsi, on conclut que  $\|u\|^2 \leq \|f(u)\|^2 \leq 9\|u\|^2$ .

7. Soit  $(x, y \in \mathbb{R}^2$  et  $u = (x, y)$ . En utilisant les coordonnées dans la base canonique,  $\|u\|^2 = x^2 + y^2$ ,  $\|f(u)\|^2 = \sqrt{(2x+1)^2 + (x+2y)^2}^2 = (2x+1)^2 + (x+2y)^2$  et  $9\|u\|^2 = 9(x^2 + y^2) = 9x^2 + 9y^2$  donc l'inégalité précédente donne

$$x^2 + y^2 \leq (2x+1)^2 + (x+2y)^2 \leq 9x^2 + 9y^2.$$

8. a. D'après la question 7, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(2x+y)^2 + (x+2y)^2 \geq 0$  donc  $(2x+y)^2 + (x+2y)^2 - (x^2 + y^2) \geq 0$  i.e.,  $\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) \geq 0$ .

b. Première méthode. La question précédente montre que  $G$  est minorée par 0. De plus,  $G(0, 0) = 0$  donc 0 est le minimum de  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En outre, pour tout  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $G(x, y) = 0$  si et seulement si l'égalité de gauche de la question 7 est une égalité i.e. si et seulement si l'inégalité de gauche de la question 6.c. est une égalité. Or, on a montré cette égalité en montrant observant que  $\|f(u)\|^2 = 8a^2 + \|u\|^2 \geq \|u\|^2$ . Ainsi, il y a égalité si et seulement si  $8a^2 = 0$  i.e.  $a = 0$ . Or, par définition,  $u = ae_1 + be_2$  donc il y a égalité si et seulement si  $u = be_2$  i.e.  $u$  appartient au sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre 1. Or, ce sous-espace est la droite vectorielle engendrée par  $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  qui est aussi

$$\text{Vect}\{(1, -1)\} = \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  où  $G$  atteint son minimum est bien  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ .

Seconde méthode. La fonction  $G$  est dérivable par rapport à  $x$  et à  $y$  et, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 2 \times 2 \times (2x + y) + 2 \times (x + 2y) - 2x = 8x + 8y = 8(x + y)$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 2 \times (2x + y) + 2 \times 2 \times (x + 2y) - 2y = 8x + 8y = 8(x + y)$$

Ainsi, les points critiques sont les vecteurs  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x + y = 0$ . Si  $G$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^2$  alors ce minimum est un point critique donc appartient à  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ . Or, pour un tel vecteur  $(x, y)$ ,  $y = -x$  donc

$$G(x, y) = (2x - x)^2 + (x - 2x)^2 - (x^2 + (-x)^2) = x^2 + (-x)^2 - x^2 - (-x)^2 = 0.$$

Or, on sait d'après la question précédente que 0 est un minorant de  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$  donc on conclut que 0 est le minimum de  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$  et qu'il atteint en tout vecteur appartenant à  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ .

# Analyse (2024)

## Partie A. Étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln(x)$ .

1. Calculer  $f(1)$ .
2. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$  et donner son signe.
  - b. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
3.
  - a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $\infty$ .
  - b. En déduire que  $f$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers un intervalle que l'on précisera.
4.
  - a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier strictement positif. Justifier que l'équation  $x + \ln(x) = n$  possède une unique solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ , que l'on note  $u_n$ .
  - b. Donner  $u_1$ .

Dans la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à déterminer explicitement  $u_n$ . On notera de plus que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  vérifie l'égalité  $f(u_n) = n$ , soit :

$$u_n + \ln(u_n) = n \quad (\star),$$

## Partie B. Étude de la suite $(u_n)$

1. Comparer  $f(u_n)$  et  $f(u_{n+1})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. On admet que, pour tout  $x > 0$ , on a l'inégalité  $\ln(x) \leq x$ .
  - a. En utilisant la relation  $(\star)$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{n}{2}$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Solution.

#### Partie A. Étude d'une fonction

1. On calcule :  $f(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$  d'où  $f(1) = 1$ .
2. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - a. Par linéarité de la dérivation, on calcule pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$  d'où pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ .  
Par stricte positivité de la fonction inverse sur  $]0; +\infty[$  et somme de nombres strictement positifs, on en déduit : pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ .
  - b. Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
3.
  - a. Étant donné que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , par somme de limites,  $\lim_0 f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .
  - b. Comme la fonction  $f$  est continue (car dérivable) et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , alors par le théorème de la bijection,  $f$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  car  $f(]0; +\infty[) = ]\lim_0 f; \lim_{+\infty} f[ = ]-\infty; +\infty[$ .
4.
  - a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $n$  est notamment dans  $\mathbb{R}$ , alors par définition de bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $n$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $]0; +\infty[$ , c'est-à-dire l'équation  $x + \ln(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .

- b. Comme  $f(1) = 1$  d'après A.1, le réel 1 est solution dans  $]0; +\infty[$  de  $x + \ln(x) = 1$  si bien que par unicité prouvée en A.4.(a), 1 est l'unique solution de  $x + \ln(x) = 1$  d'où  $u_1 = 1$ .

### Partie B. Étude de la suite $(u_n)$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par définition même de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , on a  $f(u_n) = n$  et  $f(u_{n+1}) = n + 1$  si bien que  $f(u_n) < f(u_{n+1})$ .

Les nombres  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont deux réels appartenant à  $]0; +\infty[$  tels que  $f(u_n) < f(u_{n+1})$  donc, par stricte croissance de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ ,  $u_n < u_{n+1}$ .

Ainsi, on a montré que la suite  $(u_n)$  est croissante.

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par définition même de  $u_n$ , on sait que  $u_n > 0$  et  $u_n + \ln(u_n) = n$ .

Grâce à l'inégalité admise dans l'énoncé, on déduit de  $u_n > 0$  que  $\ln(u_n) \leq u_n$  si bien que  $u_n + \ln(u_n) \leq u_n + u_n$  d'où  $n \leq 2u_n$  c'est-à-dire  $\frac{n}{2} \leq u_n$ .

Ainsi, on a montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{n}{2}$ .

- b. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{n}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ , alors, par le théorème de comparaison, on a également :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## Analyse (2020)

On rappelle le résultat suivant :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $I$ . Si on a  $u'(x) = 0$  pour tout réel  $x$  de  $I$ , alors  $u$  est constante sur  $I$ .

On rappelle que la fonction arctangente, notée  $\arctan$ , est la bijection réciproque de la fonction  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ . C'est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a la relation pour tout réel  $x$  :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Rappeler la valeur de  $\arctan(0)$  et de  $\arctan(1)$ .
- Rappeler la valeur de la limite de  $\arctan$  en  $+\infty$ .
- On considère la fonction  $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .

*Attention, on rappelle que si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables, la dérivée de leur composée est donnée par la formule  $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$ .*

- Calculer, pour tout  $x$  non nul,  $\arctan'(x) + f'(x)$ .
- Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ . On précisera soigneusement les théorèmes employés.
- Si  $x$  est strictement négatif, donner la valeur de  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ . On rappelle que  $\arctan$  est impaire.
- Le résultat rappelé au début de l'énoncé reste-t-il vrai si  $I$  n'est pas un intervalle ?
- Calculer la limite de  $\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$  lorsque  $x$  tend vers 0.

9. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \arctan \left( \frac{1}{x} \right) \right) = 1$ .
10. Donner alors un équivalent **très simple** de la suite  $(u_n)$ , de terme général  $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$ .

**Solution.**

1.  $\arctan(0) = 0$  et  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ .

3. Pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \arctan' \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{x} \right)^2} = -\frac{1}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

donc  $f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$ .

4. Pour tout  $x$  non nul,

$$\arctan'(x) + f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

5. Posons  $h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan \left( \frac{1}{x} \right)$ . Alors, pour tout  $x \neq 0$ ,  $h'(x) = 0$  d'après la question précédente. Comme  $]0; +\infty[$  est un intervalle, on en déduit que  $h$  est constante sur  $I$ . De plus,  $h(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$  donc, pour tout réel  $x > 0$ ,  $h(x) = \frac{\pi}{2}$ . On a donc

montré que,  $\boxed{\text{pour tout } x > 0, \arctan(x) + \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}}$ .

6. Soit un réel  $x < 0$ . Alors,  $-x > 0$  donc, d'après la question précédente,  $\arctan(-x) + \arctan \left( \frac{1}{-x} \right) = \frac{\pi}{2}$ . Or, par imparité de la fonction  $\arctan$ ,

$$\arctan(-x) + \arctan \left( \frac{1}{-x} \right) = -\arctan(x) + \arctan \left( -\frac{1}{x} \right) = -\arctan(x) - \arctan \left( \frac{1}{x} \right)$$

donc  $-\arctan(x) - \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$  et ainsi  $\boxed{\arctan(x) + \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}}$ .

7. La dérivée de la fonction  $h$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  mais  $h$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}^*$  car  $h(x) = -\frac{\pi}{2}$  pour tout  $x < 0$  et  $h(x) = \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x > 0$ . Ainsi, le théorème rappelé au début de l'énoncé n'est pas vrai si  $I$  n'est pas un intervalle.

8. Comme la fonction  $\arctan$  est dérivable en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1 + 0^2} = 1.$$

9. Comme  $\arctan(0) = 0$ , la limite précédente se réécrit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \left( \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = 1$  c'est-à-dire  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \left( \frac{1}{x} \right) = 1}$ .

10. Pour tout  $n > 0$ ,  $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan \left( \frac{1}{n} \right)$  d'après la question 5.. Or, d'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \left( \frac{1}{n} \right) = 1$  donc  $\arctan \left( \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$ . On conclut donc que

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}.$$

# Analyse (2008)

## 1. Ensemble de définition

- a. Soit  $x$  appartenant à  $]1; +\infty[$ . Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$  et déterminer son signe.
- b. Soit  $x$  appartenant à  $]0; 1[$ . Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$  et déterminer son signe.

Nous pouvons ainsi définir une fonction numérique  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

## 2. Étude de la dérivabilité

- a. Justifier l'existence d'une primitive  $H$  de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  sur  $]1; +\infty[$ , puis exprimer pour tout réel  $x$  appartenant à  $]1; +\infty[$ ,  $f(x)$  en fonction de  $H(x^2)$  et  $H(x)$ . En déduire que  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et calculer  $f'$ . Quel est le sens de variations de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  ?
- b. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et calculer  $f'$ . Quel est le sens de variations de  $f$  sur  $]0; 1[$  ?

## 3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

### a. Étude en 0 par valeurs supérieures

Soit  $x$  appartenant à  $]0; 1[$ . Montrer que, pour tout  $t$  appartenant à  $[x^2; x]$ ,

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

et en déduire que

$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.$$

Montrer alors que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en 0 de  $f$  ainsi prolongée.

La fonction  $f$  ainsi prolongée est toujours notée  $f$  dans la suite.

À l'aide de l'encadrement précédent, montrer que  $\frac{f(x)}{x}$  a pour limite 0 en 0.

Que peut-on en déduire sur la fonction  $f$  ? Interpréter géométriquement ce résultat.

### b. Étude en l'infini

En s'inspirant de la méthode décrite en a., pour tout réel  $x$  appartenant à  $]1; +\infty[$ , encadrer  $f(x)$ .

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

### c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit  $x$  appartenant à  $]1; +\infty[$ . Montrer que  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(2)$ .

En remarquant que  $f(x) = \int_x^{x^2} t \times \frac{dt}{t \ln(t)}$ , montrer que  $x \ln(2) \leq f(x) \leq x^2 \ln(2)$  et en déduire l'existence et la valeur de la limite de  $f$  en 1 par valeurs supérieures.

#### d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Par un travail similaire à celui de la question précédente, montrer que  $f(x)$  a pour limite  $\ln(2)$  lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

#### e. Prolongement par continuité de $f$ en 1

Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 1 en posant  $f(1) = \ln(2)$ .

La fonction ainsi prolongée est toujours notée  $f$  dans la suite.

### Solution

#### 1. Ensemble de définition

- a. La fonction  $\ln$  est continue et strictement positive sur  $]1; +\infty[$  donc sur  $[x; x^2]$  (car  $x > 1$ ). Dès lors, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  est continue et positive sur  $[x; x^2]$ . On en

déduit que l'intégrale  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$  existe et est positive.

- b. La fonction  $\ln$  est continue et strictement négative sur  $]0; 1[$  donc sur  $[x^2; x]$  (car  $x \in ]0; 1[$ ). Dès lors, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  est continue et négative sur  $[x^2; x]$ . On

en déduit que l'intégrale  $\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$  existe et est négative et donc, étant donné que

$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = - \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$ , on conclut que l'intégrale  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$  existe et est positive.

#### 2. Étude de la dérivabilité

- a. Comme on l'a dit précédemment, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  est continue sur  $]1; +\infty[$  donc elle admet des primitives sur cet intervalle. En notant  $H$  l'une de ces primitives, par le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout  $x > 1$ ,  $f(x) = H(x^2) - H(x)$ .

Comme  $H$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$ , par composition et différence,  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  et, pour tout  $x > 1$ ,

$$f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = 2x \times \frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}$$

i.e.  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ .

Pour tout  $x > 1$ ,  $x-1 > 0$  et  $\ln(x) > 0$  donc  $f'(x) > 0$ . Ainsi, on conclut que  $f$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

- b. Par le même raisonnement,  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  admet des primitives sur  $]0; 1[$  et, en notant  $H$  l'une de ces primitives, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) = H(x^2) - H(x)$ . Dès lors, de la même façon,  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ .

Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $x-1 < 0$  et  $\ln(x) < 0$  donc  $f'(x) > 0$ . Ainsi, on conclut que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$ .

#### 3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

##### a. Étude en 0 par valeurs supérieures

Soit  $t \in [x^2; x]$ . Alors,  $x^2 \leq t \leq x < 1$  donc, par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0; +\infty[$ ,  $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ . Dès lors, par stricte décroissance de la fonction

inverse sur  $] -\infty ; 0[$ ,  $\boxed{\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}}$ . Par croissance de l'intégrale, comme  $x^2 < x$ , on en déduit que

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

donc, en multipliant par  $-1$ ,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt.$$

Or,  $\frac{1}{\ln(x)}$  ne dépend pas de  $t$  donc, par linéarité,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt = \frac{1}{\ln(x)} \int_x^{x^2} 1 dt = \frac{1}{\ln(x)} [t]_x^{x^2} = \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

et

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{2 \ln(x)} dt = \frac{1}{2} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt = \frac{x(x-1)}{2 \ln(x)}.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = +\infty$ , par quotient,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} = 0$ . Par le théorème d'encadrement, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0}$ .

Pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ , on déduit de l'encadrement précédent, en divisant par  $x > 0$ , que

$$\frac{x-1}{2 \ln(x)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Par le même raisonnement, on en déduit que  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0}$ .

Autrement,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  donc  $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$ . On en déduit que la courbe de  $f$  admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

## b. Étude en l'infini

Soit un réel  $x > 1$  et soit  $t \in [x ; x^2]$ . Alors,  $1 < x \leq t \leq x^2$  donc, par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$ . Dès lors, par stricte décroissance de la fonction inverse sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $\boxed{\frac{1}{\ln(x^2)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}}$ . Par croissance de l'intégrale, comme  $x < x^2$ , on en déduit que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$$

et donc, comme précédemment,

$$\boxed{\frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}}.$$

Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} \sim \frac{x^2}{2 \ln(x)}$  et, par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} = +\infty$ . Par le théorème de comparaison, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

### c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit  $x > 1$ . En écrivant  $\frac{1}{t \ln(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$ , on reconnaît une forme  $\frac{u'}{u}$  donc

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} dt = [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} = \ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln(x)|).$$

Or, comme  $x > 1$ ,  $\ln(x) > 0$  et  $\ln(x^2) > 0$  donc

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} &= \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} dt = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2 \ln(x)) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) \end{aligned}$$

soit finalement  $\boxed{\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(2)}$ .

Pour tout  $t \in [x; x^2]$ ,  $x \leq t \leq x^2$  donc, comme  $\frac{1}{t \ln(t)} > 0$ ,  $\frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{t}{t \ln(t)} \leq \frac{x^2}{t \ln(t)}$  i.e.  $\frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t \ln(t)}$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln(t)} dt$$

i.e. par linéarité,

$$x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

et, ainsi, on conclut que  $\boxed{x \ln(2) \leq f(x) \leq x^2 \ln(2)}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln(2) = \ln(2)$  donc, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln(2)}.$$

### d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Soit  $x \in ]0; 1[$ . Alors, pour tout  $t \in [x^2; x]$ ,  $x^2 \leq t \leq x$  donc, comme  $\frac{1}{t \ln(t)} < 0$ ,  $\frac{x^2}{t \ln(t)} \geq \frac{t}{t \ln(t)} \geq \frac{x}{t \ln(t)}$  i.e.  $\frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t \ln(t)}$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln(t)} dt$$

donc

$$x \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq f(x) \geq x^2 \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

Or, comme  $\ln(x) < 0$  et  $\ln(x^2) < 0$ ,

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} &= \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} dt = \ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln(x)|) = \ln(-2 \ln(x)) - \ln(-\ln(x)) \\ &= \ln(2) + \ln(-\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) = \ln(2)\end{aligned}$$

donc, finalement,  $x \ln(2) \geq f(x) \geq x^2 \ln(2)$  et, comme précédemment, on conclut par encadrement que  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)}$ .

#### e. Prolongement par continuité de $f$ en 1

D'après les questions précédentes,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)$ , donc on peut prolonger  $f$  par continuité en 1 en posant  $\boxed{f(1) = \ln(2)}$ .

## Probabilités (2013)

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de  $\frac{1}{3}$ .

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D2 à 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- nous commençons par jeter la pièce,
- si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D1, sinon nous choisissons le dé D2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ensuite, nous jetons plusieurs fois le dé choisi et, pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

- D1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D1 »,
- D2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D2 »,
- pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $R_n$  est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au  $n^{\text{ème}}$  lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de  $\mathbf{P}(D1)$  ?  $\mathbf{P}(D2)$  ?

Montrer que  $\{D1, D2\}$  constitue un système complet d'évènements.

2. Soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ . Quelles sont les valeurs de  $\mathbf{P}_{D1}(R_n)$  ? de  $\mathbf{P}_{D2}(R_n)$  ?

3. Calculer  $\mathbf{P}(R_1)$ .

4. Établir un lien entre les probabilités  $\mathbf{P}_{D1}(R_1)$ ,  $\mathbf{P}_{D1}(R_2)$  et  $\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2)$ .

En déduire la valeur de  $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$ .

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire, pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , la valeur de  $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ .

6. Calculer  $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(D1)$  puis, de manière générale, pour tout entier naturel non nul  $n$ , montrer que :

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ . Après  $n$  lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1 ou sur le fait d'avoir un face rouge au lancer suivant ?

### Solution

1. D'après l'énoncé,  $\mathbf{P}(D1) = \frac{1}{3}$  et  $\mathbf{P}(D2) = \frac{2}{3}$ .

Comme  $D2 = \overline{D1}$ ,  $\{D1, D2\}$  constitue un système complet d'évènements.

2. D'après l'énoncé,  $\mathbf{P}_{D1}(R_n) = \frac{2}{3}$  et  $\mathbf{P}_{D2}(R_n) = \frac{1}{3}$ .

3. Comme  $\{D1, D2\}$  constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

donc  $\mathbf{P}(R_1) = \frac{4}{9}$ .

4. Une fois que le dé a été choisi, les lancers de dés sont indépendants les uns des autres donc  $\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_{D1}(R_1) \times \mathbf{P}_{D1}(R_2)$ .

Ainsi,  $\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

De la même façon,  $\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_{D2}(R_1) \times \mathbf{P}_{D2}(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .

Comme  $\{D1, D2\}$  constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{9}$$

i.e.  $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{9}$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une fois que le dé a été choisi, les lancers de dés sont indépendants les uns des autres donc

$$\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \mathbf{P}_{D1}(R_1) \times \mathbf{P}_{D1}(R_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{D1}(R_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et

$$\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \mathbf{P}_{D2}(R_1) \times \mathbf{P}_{D2}(R_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{D2}(R_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme  $\{D1, D2\}$  constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3 \times 3^n} + \frac{2 \times 1^n}{3 \times 3^n} \end{aligned}$$

soit finalement  $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}$ .

On en déduit que, pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n+1})}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{\frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}+2}{3 \times 3^{n+1}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n+2}$$

soit finalement

$$\boxed{\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)}}.$$

6. Par définition,

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(D1) = \frac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap D1)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}$$

soit  $\boxed{\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(D1) = \frac{2}{3}}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D1) &= \frac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \cap D1)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{\mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3} \times \frac{2^n}{3^n} \times \frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n}{3^{n+1}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n+2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\boxed{\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n+2}}$ .

7. La question revient à comparer  $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)}$  et  $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n+2}$  ce qui revient à comparer  $\frac{2^{n+1}+2}{3}$  et  $2^n$ . Or, pour  $n \geq 1$ ,  $2 \leq 2^n$  donc

$$2^{n+1}+2 \leq 2^{n+1}+2^n = 2^n(2+1) = 3 \times 2^n$$

et ainsi  $\frac{2^{n+1}+2}{3} \leq 2^n$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{il vaut mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1}}$ .

## Probabilités (2020)

Si l'on dispose de  $k$  jetons que l'on place dans  $n$  urnes, combien d'urnes restent vides? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie 1. est indépendante des suivantes.

### 1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes  $a$  et  $b$ .

Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne  $a$ , et une chance sur deux d'être dans l'urne  $b$ . Il en est de même pour chacun des quatre autres jetons. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne  $a$ .

1. Reconnaître la loi de  $X$ .
2. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle  $X$ , l'évènement « L'urne  $a$  est vide ». Faire de même avec l'évènement « L'urne  $b$  est vide ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement « L'un des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas général de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de **trois** urnes appelées  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

De même que précédemment, chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne  $a$ , un chance sur trois d'être dans l'urne  $b$ , et une chance sur trois d'être dans l'urne  $c$ .

## 2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$  et  $E_i$  l'évènement « Le jeton  $i$  n'est pas dans l'urne  $a$  ». Donner la probabilité de l'évènement contraire  $\overline{E}_i$  puis celle de l'évènement  $E_i$ .
2. Soit  $V_a$  l'évènement « L'urne  $a$  est vide ». Exprimer  $V_a$  en fonction des fonctions  $E_1, E_2, E_3, E_4$  et  $E_5$ .
3. En déduire que  $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$ .

Par symétrie du problème, on pourra admettre que la probabilité  $P(V_b)$  que  $b$  soit vide et que la probabilité  $P(V_c)$  que  $c$  soit vide ont aussi cette même valeur.

On note désormais  $N$  la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de  $N$ .

## 3) Calcul de $P(N = 2)$ et de $P(N = 3)$

1. Que signifie, en français, l'évènement  $(N = 3)$ ? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*
2. Que signifie, en français, l'évènement  $\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c$ ? Calculer  $P(\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c)$ .  
On admettra que  $P(V_a \cap \overline{V}_b \cap V_c)$  et  $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V}_c)$  sont aussi égales à cette valeur.
3. Calculer la probabilité de l'évènement  $(N = 2)$ . On exprimera dans un premier temps l'évènement  $(N = 2)$  en fonction d'évènements tels que  $\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c$ , et d'autres du même genre.

## 4) Espérance de $N$

On va maintenant calculer l'espérance de  $N$ .

1. On note  $Z_a$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement  $V_a$  est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations  $Z_b$  ( $Z_b$  vaut 1 si  $V_b$  est réalisé, et 0 sinon) et  $Z_c$  ( $Z_c$  vaut 1 si l'urne  $c$  est vide, et 0 sinon). Reconnaître la loi et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires  $Z_a, Z_b$  et  $Z_c$ .
2. On note toujours  $N$  le nombre d'urnes vides. Exprimer  $N$  en fonction de  $Z_a, Z_b$  et  $Z_c$ .
3. Calculer alors l'espérance de  $N$ .

## 5) Loi de $N$

1. Montrer que  $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$ .
2. En déduire la valeur de  $P(N = 1)$ .
3. Donner enfin le loi de la variable aléatoire  $N$ . On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

**Solution.**

### 1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

1. Si on note, pour tout  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ ,  $X_i$  la variable aléatoire égale à 1 si on place le jeton  $i$  dans l'urne  $a$  et 0 sinon alors  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . De plus, les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3, X_4$  et  $X_5$  sont indépendantes et, par définition,  $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$  donc  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$ .
2. L'évènement « L'urne  $a$  est vide » est l'évènement  $\{X = 0\}$  et l'évènement « L'urne  $b$  est vide » est l'évènement  $\{X = 5\}$ .
3. L'évènement « L'une des deux urnes est vide » est l'évènement  $\{X = 0\} \cup \{X = 5\}$  et cette union est disjointe donc la probabilité de cet évènement est

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 5) &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0} + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-5} \\ &= \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

soit  $P(X = 0) + P(X = 5) = \frac{1}{16}$ .

### 2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Par hypothèse,  $P(\overline{E_i}) = \frac{1}{3}$  donc  $P(E_i) = 1 - P(\overline{E_i}) = \frac{2}{3}$ .
2.  $V_a$  est réalisé si aucun jeton n'est dans l'urne  $a$  donc  $V_a = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$ .
3. Par hypothèse, les évènements  $E_i$  sont deux à deux indépendants donc

$$P(V_a) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)P(E_5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

soit  $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$ .

### 3) Calcul de $P(N = 2)$ et de $P(N = 3)$

1.  $(N = 3)$  signifie que les 3 urnes sont vides ce qui est un évènement impossible puisque chaque jeton est placé dans une urne. Ainsi,  $P(N = 3) = 0$ .
2. L'évènement  $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$  signifie que les urnes  $b$  et  $c$  sont vides mais pas l'urne  $a$ , c'est-à-dire que tous les jetons ont été placés dans l'urne  $a$ . On a donc  $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4} \cap \overline{E_5}$  et, par indépendance, on en déduit que  $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}$ .

3. ( $N = 2$ ) signifie que deux des trois urnes sont vides donc

$$(N = 2) = (\overline{V}_a \cap V_b \cap V_c) \cup (V_a \cap \overline{V}_b \cap V_c) \cup (V_a \cap V_b \cap \overline{V}_c).$$

Il s'agit d'une union de trois événements incompatibles donc  $P(N = 2) = 3 \times \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3^4}$

c'est-à-dire 
$$P(N = 2) = \frac{1}{81}.$$

#### 4) Espérance de $N$

1. Par définition,  $Z_a, Z_b$  et  $Z_c$  suivent des lois de Bernoulli de paramètres  $P(V_a) = P(V_b) = P(V_c) = \frac{2^5}{3^5}$ . On a donc  $E(Z_a) = E(Z_b) = E(Z_c) = \frac{2^5}{3^5}$ .
2. Par définition,  $N = Z_a + Z_b + Z_c$ .
3. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que  $E(N) = E(Z_a) + E(Z_b) + E(Z_c) = 3 \times \frac{2^5}{3^5} = \frac{2^5}{3^4}$  c'est-à-dire  $E(N) = \frac{32}{81}$ .

#### 5) Loi de $N$

1. Par définition, l'espérance de  $N$  est  $E(N) = \sum_{i=0}^3 iP(N = i)$ . Or, pour  $i = 0$ ,  $iP(N = i) = 0$  et, pour  $i = 3$ ,  $iP(N = i) = 0$  car  $P(N = 3) = 0$ . Ainsi,  $E(N) = P(N = 1) + 2P(N = 2)$  et donc, par le résultat de la partie précédente,  $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81}$ .
2. On en déduit que  $P(N = 1) = \frac{32}{81} - 2P(N = 2) = \frac{32}{81} - 2 \times \frac{1}{81} = \frac{30}{81}$  c'est-à-dire

$$P(N = 1) = \frac{10}{27}.$$

3. En tenant compte du fait que  $\sum_{i=0}^3 P(N = i) = 1$ , on aboutit à la loi suivante :

$i$	0	1	2	3
$P(N = i)$	$\frac{50}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{81}$	0

# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES (Option Biochimie-Biologie – 2005)

Durée : 2 heures

Les différentes parties du problème sont indépendantes.

**N.B. – Les candidats sont priés :**

1. D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement, de respecter les notations de l'énoncé.
2. De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.
3. De donner les résultats encadrés.

Les vaches constituant le cheptel d'une grosse exploitation agricole sont de deux types, le type A et le type B.

## Partie A

La probabilité qu'une vache de type A produise du lait en hiver est égale à 0,8 et la probabilité qu'une vache de type B produise du lait en hiver est de 0,7. La production de lait en hiver est indépendante d'un animal à l'autre quel que soit son type.

Dans cette partie, le cheptel est formé de 200 vaches de type A et de 300 vaches de type B.

1. On choisit une bête au hasard dans ce cheptel.
  - a. Quelle est la probabilité qu'elle produise du lait en hiver ?
  - b. La vache produit du lait en hiver, quelle est la probabilité qu'elle soit du type A ?
2. On note  $N_A$  le nombre de vaches de type A du cheptel qui produisent du lait un hiver donné et  $N_B$  le nombre de vaches de type B du cheptel qui produisent du lait durant ce même hiver. On note  $N = N_A + N_B$ .
  - a. Que représente  $N$  ?
  - b. Donner les lois de  $N_A$  et  $N_B$ .
  - c. Quel est le nombre moyen de vaches du cheptel produisant du lait l'hiver considéré ?
  - d. Pour chaque vache de type A produisant du lait en hiver, il faut compter une dépense de 4 euros par jour pour des compléments alimentaires ; pour une vache de type B, cette dépense journalière est de 3 euros.  
Pour le cheptel considéré, quelle est la dépense journalière moyenne à prévoir en compléments alimentaires pour les vaches produisant du lait en hiver ?

## PARTIE B

L'exploitation dispose de deux hangars H et H' pour le stockage du foin. Chaque jour, on cherche le foin nécessaire dans l'un des deux hangars. Pour des raisons techniques, si un jour donné on utilise le hangar H, le lendemain on réutilisera ce même hangar avec une probabilité de 0,5 et si, un jour donné, on utilise le hangar H', la probabilité d'utiliser le lendemain le hangar H est égale à 0,4.

On veut analyser l'utilisation des deux hangars sur une longue période ; le premier jour, on choisit un hangar au hasard.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $p_n$  la probabilité que le hangar H soit utilisé le  $n$ -ième jour.

1. **a.** Donner  $p_1$ .  
**b.** Calculer  $p_2$ .
2. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4$ .
3. **a.** Considérons la suite  $(u_n)$  définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = p_n - \frac{4}{9}$ .  
Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la série.  
En déduire la valeur de  $u_n$  puis de  $p_n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.  
**b.** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

## PARTIE C

Une étude statistique montre que, pour ce cheptel, le nombre d'incidents dans une salle de traite, un jour donné, est une variable aléatoire  $N$  qui suit une loi de Poisson de paramètre 4. De plus, cette étude indique que, pour un jour donné, les différents incidents dans la salle de traite sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un incident dans la salle de traite donne lieu à des soins vétérinaires est égale à 0,05.

1. Quel est le nombre moyen d'incidents par jour dans la salle de traite ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir, un jour donné, au moins deux incidents dans la salle de traite ?
3. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'incidents dans la salle de traite qui, pour un jour donné, nécessitent des soins vétérinaires.  
**a.** On considère deux entiers naturels  $n$  et  $k$ .  
Calculer la probabilité conditionnelle suivante :  $P(X = k \mid N = n)$ .  
On distinguera les cas  $k \leq n$  et  $k > n$ .  
**b.** En déduire la probabilité  $P(X = k)$  pour tout entier naturel  $k$ .  
Quelle est la loi de la variable  $X$  ?

## PARTIE D

1. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} k \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) & \text{si } x \in [0; 12], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.

2. La durée, en minutes, d'un examen vétérinaire d'une vache quelconque du cheptel est une variable aléatoire réelle  $D$  qui admet  $f$  comme densité.
- Déterminer la fonction de répartition de  $D$ .
  - Calculer l'espérance mathématique de  $D$ .
3. On examine un groupe de cinq vaches, numérotées de 1 à 5. Soit  $i$  un entier naturel supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 5 ; la durée, en minutes, de l'examen pour la vache numéro  $i$  est une variable aléatoire  $D_i$  de même densité que  $D$ . Les variables aléatoires  $D_i$  sont supposées indépendantes.
- Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit inférieure ou égale à six minutes.
  - Calculer la probabilité pour que la durée de l'examen de chacune des cinq vaches soit au moins égale à trois minutes.

**FIN**

Solution.

## Partie A

1. a. Notons  $A$  : « La vache est de type A » et  $L$  : « la vache produit du lait en hiver ».  
Comme  $A$  et  $\bar{A}$  forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(L | A) + \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(L | \bar{A}) = \frac{200}{500} \times 0,8 + \frac{300}{500} \times 0,7$$

donc  $\mathbf{P}(L) = 0,74 = \frac{37}{50}$ .

- b. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(A | L) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(L | A)}{\mathbf{P}(L)} = \frac{\frac{200}{500} \times 0,8}{\frac{37}{50}}$$

i.e.  $\mathbf{P}(L) = \frac{16}{37}$ .

2. a.  $N$  représente le nombre total de vaches produisant du lait pendant l'hiver considéré.  
b. Le fait, pour une vache donnée, de produire du lait est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,8 pour le type A et 0,7 pour le type B. Ainsi, par indépendance, la variable aléatoire  $N_A$  qui compte le nombre de succès pour la type A suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(200, 0,8)$  et la variable aléatoire  $N_B$  qui compte le nombre de succès pour la type B suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(300, 0,7)$ .  
c. Le nombre moyen de vaches produisant du lait est  $\mathbf{E}(N)$ . Par linéarité de l'espérance, on en déduit que ce nombre est  $\mathbf{E}(N) = \mathbf{E}(N_A) + \mathbf{E}(N_B) = 200 \times 0,8 + 300 \times 0,7$  c'est-à-dire  $\mathbf{E}(N) = 370$ .  
d. Notons  $D_A$  la dépense journalière pour les vaches de type A et  $D_B$  celle pour les vaches de type B. Alors,  $D_A = 4N_A$  et  $D_B = 3N_B$  donc, par linéarité de l'espérance, la dépense journalière moyenne est

$$\mathbf{E}(D_A + D_B) = \mathbf{E}(D_A) + \mathbf{E}(D_B) = 4\mathbf{E}(N_A) + 3\mathbf{E}(N_B) = 4 \times 200 \times 0,8 + 3 \times 300 \times 0,7$$

soit une dépense journalière moyenne de 1270 euros.

## Partie B

1. a. Comme le premier hangar est choisi au hasard,  $p_1 = \frac{1}{2}$ .  
b. Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$  : « Choisir le hangar H le jour  $n$  ». Comme  $H_1$  et  $\bar{H}_1$  forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$p_2 = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(H_2 | H_1) + \mathbf{P}(\bar{H}_1)\mathbf{P}(H_2 | \bar{H}_1) = \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{1}{2} \times 0,4$$

donc  $p_2 = 0,45$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $H_n$  et  $\overline{H_n}$  forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbf{P}(H_{n+1}) = \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(H_{n+1} | H_n) + \mathbf{P}(\overline{H_n})\mathbf{P}(H_{n+1} | \overline{H_n}) \\ &= p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4 - 0,4p_n \end{aligned}$$

donc  $\boxed{p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4}$ .

3. a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{9} = \frac{1}{10}p_n + \frac{2}{5} - \frac{4}{9} = \frac{1}{10}p_n - \frac{2}{45} = \frac{1}{10} \left( p_n - \frac{4}{9} \right)$$

donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ . On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ . Or,  $u_1 = p_1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = p_n - \frac{4}{9}$  donc  $p_n = u_n + \frac{4}{9}$ . On conclut donc que,  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{9}}$ .

- b. Comme  $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$  et donc  $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{4}{9}}$ .

## Partie C

1. Le nombre moyen d'incidents est  $\boxed{\mathbf{E}(N) = 4}$ .

2. La probabilité d'avoir au moins 2 incidents est

$$\mathbf{P}(N \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(N \leq 1) = 1 - \left( \frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4} \right)$$

i.e.  $\boxed{\mathbf{P}(N \geq 2) = 1 - 5e^{-4}}$ .

3. a. Le nombre d'incidents qui nécessitent des soins est inférieur ou égal au nombre d'incidents donc, si  $k > n$ ,  $\mathbf{P}(X = k | N = n) = 0$ . De plus, si  $(N = n)$  avec  $n \geq k$ , alors chaque incident est une épreuve de Bernoulli en prenant comme succès « l'incident nécessite des soins » donc, par indépendance, la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $k$  est une loi binomiale de paramètres  $n$  et 0,05. Ainsi, dans ce cas,

$$\mathbf{P}(X = k | N = n) = \binom{n}{k} \times 0,05^k \times 0,95^{n-k}.$$

On conclut que  $\boxed{\mathbf{P}(X = k | N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \times 0,05^k \times 0,95^{n-k} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}}$ .

- b. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $(\{N = n\})_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} e^{-4} \times \binom{n}{k} \times 0,05^k \times 0,95^{n-k} \quad (\text{car } \mathbf{P}(X = k \mid N = n) = 0 \text{ si } n < k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} e^{-4} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times 0,05^k \times 0,95^{n-k} \\
&= \frac{e^{-4}}{k!} \times 0,05^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4^n}{(n-k)!} \times 0,95^{n-k} \\
&= \frac{e^{-4}}{k!} \times 0,05^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4^{j+k}}{j!} \times 0,95^j \\
&= \frac{e^{-4}}{k!} \times 0,05^k \times 4^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4^j \times 0,95^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-4}}{k!} \times (0,05 \times 4)^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(4 \times 0,95)^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-4}}{k!} \times (0,2)^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(3,8)^j}{j!} \\
&= \frac{0,2^k}{k!} \times e^{-4} \times e^{3,8}
\end{aligned}$$

soit finalement  $\boxed{\mathbf{P}(X = k) = \frac{0,2^k}{k!} e^{-0,2}}$ .

Ainsi,  $\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson } \mathcal{P}(0,2)}$ .

## Partie D

1. La fonction  $f$  est continue par morceaux car elle est nulle en-dehors de  $[0; 12]$  et les fonction  $x \mapsto k \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$  est continue sur  $[0; 12]$  comme composée de fonctions continues. De plus,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $k \geq 0$  car si  $x \in [0; 12]$ ,  $\frac{\pi x}{12} \in [0; \pi]$  et la fonction sinus est positive sur  $[0; \pi]$ .

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{12} k \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) dx = \left[ -\frac{12k}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \right]_0^{12} \\
&= -\frac{12k}{\pi} \cos(\pi) - \left( -\frac{12k}{\pi} \cos(0) \right) \\
&= -\frac{12k}{\pi} \times (-1) + \frac{12k}{\pi} \times 1 \\
&= \frac{24k}{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est une densité de probabilité si et seulement si  $\frac{24k}{\pi} = 1$  i.e.  $\boxed{k = \frac{\pi}{24}}$ .

**2. a.** La fonction de répartition  $F$  de  $D$  est définie, pour tout réel  $x$ , par

$$F(x) = \mathbf{P}(D \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Distinguons 3 cas.

Si  $x < 0$  alors  $f(t) = 0$  pour tout  $t \leq x$  donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

Si  $x \in [0; 12]$  alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]_0^x = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos(0)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \end{aligned}$$

Si  $x > 12$  alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{12} f(t) dt + \int_{12}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{12} \frac{\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt + \int_{12}^x 0 dt \\ &= 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) & \text{si } x \in [0; 12] \\ 1 & \text{si } x > 12 \end{cases}$$

**b.** Comme  $f$  est nulle en-dehors du segment  $[0; 12]$ ,  $D$  admet une espérance et

$$\mathbf{E}(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{12} x \times \frac{\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) dx$$

Considérons les fonctions

$$u : x \mapsto x \quad \text{et} \quad v : x \mapsto -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

de sorte que

$$u' : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto \frac{\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

Alors,  $u$  et  $v$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(D) &= \left[ x \times \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right) \right]_0^{12} - \int_0^{12} 1 \times \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right) dx \\ &= 12 \times \left(-\frac{1}{2} \cos(\pi)\right) - 0 + \frac{1}{2} \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) dx \\ &= 6 + \frac{1}{2} \left[ \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \right]_0^{12} \\ &= 6 + \frac{6}{\pi} \sin(\pi) - \frac{6}{\pi} \sin(0) \end{aligned}$$

donc  $\mathbf{E}(D) = 6$ .

3. a. On cherche la probabilité  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^5(D_i \leq 6)\right)$  i.e. comme les  $D_i$  sont mutuellement indépendantes

$$\mathbf{P}(D_1 \leq 6) \times \mathbf{P}(D_2 \leq 6) \times \mathbf{P}(D_3 \leq 6) \times \mathbf{P}(D_4 \leq 6) \times \mathbf{P}(D_5 \leq 6).$$

Or, comme chaque  $D_i$  suit la même loi que  $D$ , cette probabilité est donc égale à  $\mathbf{P}(D \leq 6)^5 = F(6)^5$ .

Or,  $F(6) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi \times 6}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$  donc la probabilité que le temps d'examen soit inférieur ou égal à 6 minutes pour chacune des 5 vaches est  $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ .

- b. De la même façon,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^5(D_i \geq 3)\right) = \mathbf{P}(D \geq 3)^5 = [1 - \mathbf{P}(D < 3)]^5.$$

Comme  $D$  est une variable à densité,

$$\mathbf{P}(D < 3) = \mathbf{P}(D \leq 3) = F(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

donc la probabilité que le temps d'examen soit inférieur à 3 minutes pour chacune des 5 vaches est  $\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)^5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^5$ .