⧫ Révisions – Mars 2024

Algèbre (2021)

Dans cet exercice, les matrices sont toutes de taille 3×3 et à coefficients réels. En cas de besoin, on pourra noter I_3 la matrice identité, et $\mathscr{B}_c$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que le vecteur $(1\,;0\,;0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

2. Démontrer que 4 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé.

3. *Sans justifier*, donner un réel a tel que le vecteur $(a\,;1\,;0)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 3. *(On demande seulement la valeur correcte de a).*

*Les trois questions précédentes permettent de montrer que A est diagonalisable : on l'**admet** ici.*

4. *Sans justifier* donner une matrice D diagonale et une matrice P_0 inversible vérifiant les deux conditions suivantes :

- $D = P_0^{-1} A P_0$
- La matrice P_0 est de la forme $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{pmatrix}$ où a est le réel trouvé plus haut, et x_0, y_0 et z_0 sont trois réels que l'on précisera.

(On demande seulement les expressions correctes de D et de P_0 sans justifications.)

On rappelle que u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. soit F l'ensemble suivant :

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x,y,z) = 4(x,y,z)\}.$$

5. Montrer que F est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner une base de F.

Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, où a est le réel trouvé à la question 3.

7. Calculer le produit suivant : $M_{x,y,z} \times D$. Calculer aussi le produit : $A \times M_{x,y,z}$

8. Soit $(x\,;y\,;z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le vecteur $(x\,;y\,;z)$ appartient à F si, et seulement si, on a la relation $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$.

9. Soit Q une matrice inversible telle que $D = Q^{-1}AQ$. A-t-on obligatoirement $Q = P_0$?

Solution.

1. Étant donné que $(1\,;0\,;0)$ n'est pas nul et que $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, le vecteur $\underline{(1\,;0\,;0)\text{ est un vecteur propre de }u\text{ associé à la valeur propre }1}$.

2. On cherche un vecteur non nul $v=(x\,;y\,;z)$ tel que $u(v)=4v$. Matriciellement, cette égalité se traduit par

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+y+2z=4x\\3y+z=4y\\4z=4z\end{cases}\iff\begin{cases}-3x+y+2z=0\\z=y\end{cases}\iff\begin{cases}x=y\\z=y\end{cases}$$

On voit que $(1\,;1\,;1)$ est une solution non nul donc $\underline{4\text{ est valeur propre de }u\text{ et un vecteur propre associé est }(1\,;1\,;1)}$.

3. $\boxed{a=\frac{1}{2}}$ (car si $w=(a\,;2\,;0)$ vérifie $u(w)=3w$ alors en égalant les première coordonnées dans la base canonique on obtient $a+1=3a$).

4. $\boxed{D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$ et $\boxed{P_0=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

5. Par définition, F est le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 donc, par théorème, $\boxed{F\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathbb{R}^3}$.

6. Le calcul de la question 2. montrer que $F=\{(y\,;y\,;y)\in\mathbb{R}^3\mid y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))$ donc $\boxed{v=(1\,;1\,;1)\text{ forme une base de }F}$.

7. D'une part,

$$M_{x,y,z}\times D=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&x\\0&1&y\\0&0&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&4x\\0&3&4y\\0&0&4z\end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$$A\times M_{x,y,z}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&3&1\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&x\\0&1&y\\0&0&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&x+y+2z\\0&3&3y+z\\0&0&4z\end{pmatrix}$$

8. D'après la question précédente,

$$M_{x,y,z}\times D=A\times M_{x,y,z}\iff\begin{pmatrix}4x\\4y\\4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2z\\3y+z\\4z\end{pmatrix}\iff4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff(x\,;y\,;y)\in F.$$

Ainsi, $\boxed{M_{x,y,z}\times D=A\times M_{x,y,z}\text{ si et seulement si }(x\,;y\,;y)\in F}$.

9. La réponse est non. Par exemple, $(2\,;2\,;2)\in F$ donc, d'après la question précédente, $M_{2,2,2}\times D=A\times M_{2,2,2}$. De plus $M_{2,2,2}$ est inversible car est triangulaire et aucun de ses termes diagonaux n'est nulle donc $D=M_{2,2,2}^{-1}AM_{2,2,2}$. Pour autant, $M_{2,2,2}\neq P$.

Analyse (2022)

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \ln(t+1)$ sur $[0\,;1]$.

b. En déduire la valeur de I_0.

2. **a.** En effectuant le changement de variable $u = t+1$, prouver que l'on a :

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire la valeur de I_1.

3. **a.** Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, donner le signe de $\dfrac{t^n}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que la suite (I_n) est positive.

4. **a.** Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, comparer $\dfrac{t^n}{t+1}$ et $\dfrac{t^{n+1}}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Comparer I_n et I_{n+1} et donner la monotone de la suite (I_n).

5. Montrer que la suite (I_n) admet une limite finie, et que cette limite est positive.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

7. En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n)

8. Le but de cette question est de donner un équivalent simple de (I_n).

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la double inégalité,

$$2I_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n}{n+1} \leqslant 2nI_n \leqslant 1.$$

c. Donner la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers l'infini.

d. Conclure.

9. On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $K_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t+1)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}$$

(On pourra réaliser une intégration par parties.)

b. Prouver que la suite (K_n) tend vers 0.

c. Montrer que $K_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$.

Solution.

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in [0\,;1]$, $\boxed{f'(t) = \dfrac{1}{t+1}}$.

b. On en déduit que

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \ln(2) - \ln(1)$$

donc $\boxed{I_0 = \ln(2)}$.

2. **a.** La fonction $\varphi : u \longmapsto u - 1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, avec le changement de variable $u = t+1$ (c'est-à-dire $t = \varphi(u)$), on a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, et, comme $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(2) = 1$,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 1\,\mathrm{d}u - \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\boxed{I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u}.$$

b. On en déduit que

$$I_1 = 1 - [\ln(u)]_1^2 \text{ soit } \boxed{I_1 = 1 - \ln(2)}.$$

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;1]$. Alors, $t^n \geqslant 0$ et $t+1 > 0$ donc $\boxed{\dfrac{t^n}{t+1} \geqslant 0}$.

b. Par positivité de l'intégrale, comme $0 < 1$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc la suite $\boxed{(I_n) \text{ est positive}}$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;1]$. Alors, $t \leqslant 1$ donc, en multipliant par $\dfrac{t^n}{t+1}$, $\boxed{\dfrac{t^{n+1}}{t+1} \leqslant \dfrac{t^n}{t+1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0\,;1]$, $\dfrac{t^{n+1}}{t+1} \leqslant \dfrac{t^n}{t+1}$ donc, comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi, la suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

5. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} + \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}.$$

7. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \ell$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell$ donç, par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n + I_{n+1} = 2\ell$. Or, par ailleurs, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, grâce à la question précédente et par unicité de la limite, $2\ell = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.

8. a. Comme la suite (I_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ donc, d'une part, $2I_{n+1} \leqslant I_n + I_{n+1}$ donc $2I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et, d'autre part, $I_{n+1} + I_n \leqslant 2I_n$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 2I_n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après ce qui précède, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 2nI_n$. D'autre part, si $n > 0$, ce qui précède assure aussi (en remplaçant $n+1$ par n) que $2I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $2nI_n \leqslant 1$. De plus, cette inégalité est encore clairement vérifiée lorsque $n = 0$ donc, finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n}{n+1} \leqslant 2nI_n \leqslant 1}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{2(n+1)} \leqslant nI_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Or, $\dfrac{n}{2(n+1)} \sim \dfrac{n}{2n} \sim \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$ et ainsi, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \dfrac{1}{2}}$.

d. Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on conclut que $nI_n \sim \dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{I_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

9. a. On pose, pour tou $t \in [\![0, 1]\!]$,

$$u(t) = t^n \qquad u'(t) = nt^{n-1}$$
$$v(t) = \ln(t+1) \qquad v'(t) = \frac{1}{t+1}$$

On définit ainsi deux fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ donc, en intégrant par parties,

$$I_n = [t^n \ln(t+1)]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1} \ln(t+1)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - n\int_0^1 t^{n-1}\ln(t+1)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\boxed{I_n = \ln(2) - nK_{n-1}}.$$

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)K_n = \ln(2) - I_{n+1}$ donc $K_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par différence, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)K_n = \ln(2) - I_{n+1}$ donc $\dfrac{(n+1)K_n}{\ln(2)} = 1 - \dfrac{I_{n+1}}{\ln(2)}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)K_n}{\ln(2)} = 1$. Ainsi, $K_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n+1}$ et donc $\boxed{K_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}}$.

Probabilités (2022)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la notion de fonction génératrice d'une variable aléatoire dans deux cas particuliers. Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $E[X]$ l'espérance de X.

A. Étude d'une première variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $V = 2^U$. La variable aléatoire V ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 (lorsque $U = 0$) et 2 (lorsque $U = 1$).

1. Montrer que $P(V = 2) = p$.

2. Déterminer la loi de V en fonction de p. On donnera le résultat sous la forme d'un tableau.

3. On définit $g_U = E[2^U]$; on a donc simplement $g_U = E[V]$. Calculer la valeur de g_U en fonction de p.

4. Montrer que si $g_U = 2$, alors la variable aléatoire U suit une loi certaine.

B. Étude d'un autre cas

On se donne à présent une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On note $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. On pose $g_X = E[2^X]$ et $h_X = E[(-1)^X]$.

1. Exprimer $P(X = 2)$ en fonction de p et q.

On va à présent exprimer h_X et g_X en fonction de p et de q.

2. On définit $Z = (-1)^X$. Donner les deux valeurs que peut prendre la variable aléatoire Z.

3. Calculer $P(Z = 1)$ en fonction de q.

4. Montrer que $h_X = 1 - 2q$.

5. Calculer aussi g_X en fonction de p et q grâce au théorème de transfert.

6. Cas particulier : lorsque X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, calculer g_X et h_X.

C. Caractérisation de la loi

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - 2y = \dfrac{1}{3} \\ 4 - 3x - 2y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues réelles. Résoudre ce système.

2. On se donne à nouveau une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On *suppose* que $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$. Montrer qu'alors X suit la loi uniforme sue $\{0, 1, 2\}$.

3. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi uniforme si, et seulement si, $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$.

Solution.

A. Étude d'une première variable aléatoire

1. $P(V=2)=P(U=1)$ et, comme $U\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, $P(U=1)=p$ donc $\boxed{P(V=2)=p}$.
2. Comme V ne prend que les valeurs 1 ou 2, $P(V=1)=1-P(V=2)=1-p$ donc la loi de V est donnée par le tableau suivant :

k	1	2
$P(V=k)$	$1-p$	p

3. On en déduit que $g_U=E[V]=1\times(1-p)+2\times p$ c'est-à-dire $\boxed{g_U=p+1}$.
4. Si $g_U=2$ alors $p+1=2$ donc $p=1$. Ainsi, dans ce cas, $U\hookrightarrow\mathscr{B}(1)$ donc U suit une loi certaine égale à 1.

B. Étude d'un autre cas

1. Les évènements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2$ forment un système complet d'évènements donc $P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)$ c'est-à-dire $\boxed{P(X=2)=1-p-q}$.
2. Si X est pair alors $Z=1$ et si X est impair alors $Z=-1$.
3. Ainsi, $(Z=1)=(X=0)\cup(X=2)$ et cette union est disjointe donc
$$P(Z=1)=P(X=0)+P(X=2)=p+1-p-q$$
soit $\boxed{P(Z=1)=1-q}$.
4. On a également $P(Z=-1)=P(X=1)q$ donc, par définition,
$$h_X=E[Z]=(-1)\times q+1\times(1-q)$$
c'est-à-dire $\boxed{h_X=1-2q}$.
5. Par le théorème de transfert,
$$g_X=E[2^X]=\sum_{k=0}^{2}2^kP(X=k)=2^0\times p+2^1\times q+2^2\times(1-p-q)=p+2q+4-4p-4q$$
c'est-à-dire $\boxed{g_X=4-3p-2q}$.
6. Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\{0,1,2\})$ alors $p=q=\dfrac{1}{3}$ donc $g_X=4-3\times\dfrac{1}{3}-2\times\dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire $\boxed{g_X=\dfrac{7}{3}}$ et $h_X=1-2\times\dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{h_X=\dfrac{1}{3}}$.

C. Caractérisation de la loi

1. Notons (S) le système de l'énoncé.
$$(S)\iff\begin{cases}3-6y=1\\12-9x-6y=7\end{cases}\iff\begin{cases}6y=2\\9x=5-6y\end{cases}\iff\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}\\9x=5-6\times\dfrac{1}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}\\x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$
Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } \left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)}$.

2. Comme $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$, d'après les résultats de la partie **B.**, $4 - 3p - 4q = \dfrac{7}{3}$ et $1 - 2q = \dfrac{1}{3}$ en posant $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, $p = q = \dfrac{1}{3}$ et donc $P(X = 2) = 1 - p - q = \dfrac{1}{3}$. Dès lors, $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2)$ donc $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } \{1, 2, 3\}}$.

3. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, d'après la question **B.6.**, $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$. Réciproquement, si $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$ alors, d'après la question précédente, X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.
Ainsi, on conclut que

$$\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } \{1, 2, 3\} \text{ si et seulement si } E[2^X] = \frac{7}{3} \text{ et } E[(-1)^X] = \frac{1}{3}}.$$