⧫ Révisions – Mars 2024

Algèbre (2021)

Dans cet exercice, les matrices sont toutes de taille 3×3 et à coefficients réels. En cas de besoin, on pourra noter I_3 la matrice identité, et $\mathscr{B}_c$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Vérifier que le vecteur $(1\,;0\,;0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

2. Démontrer que 4 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé.

3. *Sans justifier*, donner un réel a tel que le vecteur $(a\,;1\,;0)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 3. *(On demande seulement la valeur correcte de a).*

*Les trois questions précédentes permettent de montrer que A est diagonalisable : on l'**admet** ici.*

4. *Sans justifier* donner une matrice D diagonale et une matrice P_0 inversible vérifiant les deux conditions suivantes :

– $D = P_0^{-1} A P_0$

– La matrice P_0 est de la forme $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{pmatrix}$ où a est le réel trouvé plus haut, et x_0, y_0 et z_0 sont trois réels que l'on précisera.

(On demande seulement les expressions correctes de D et de P_0 sans justifications.)

On rappelle que u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. soit F l'ensemble suivant :

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x,y,z) = 4(x,y,z)\}.$$

5. Montrer que F est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner une base de F.

Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, où a est le réel trouvé à la question 3.

7. Calculer le produit suivant : $M_{x,y,z} \times D$. Calculer aussi le produit : $A \times M_{x,y,z}$

8. Soit $(x\,;y\,;z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le vecteur $(x\,;y\,;z)$ appartient à F si, et seulement si, on a la relation $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$.

9. Soit Q une matrice inversible telle que $D = Q^{-1}AQ$. A-t-on obligatoirement $Q = P_0$?

Analyse (2022)

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \ln(t+1)$ sur $[0\,;1]$.

b. En déduire la valeur de I_0.

2. **a.** En effectuant le changement de variable $u = t+1$, prouver que l'on a :

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire la valeur de I_1.

3. **a.** Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, donner le signe de $\frac{t^n}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que la suite (I_n) est positive.

4. **a.** Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, comparer $\frac{t^n}{t+1}$ et $\frac{t^{n+1}}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Comparer I_n et I_{n+1} et donner la monotone de la suite (I_n).

5. Montrer que la suite (I_n) admet une limite finie, et que cette limite est positive.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

7. En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n)

8. Le but de cette question est de donner un équivalent simple de (I_n).

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la double inégalité,

$$2I_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n}{n+1} \leqslant 2nI_n \leqslant 1.$$

c. Donner la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers l'infini.

d. Conclure.

9. On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $K_n = \int_0^1 t^n \ln(t+1)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}$$

(On pourra réaliser une intégration par parties.)

b. Prouver que la suite (K_n) tend vers 0.

c. Montrer que $K_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.

Probabilités (2022)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la notion de fonction génératrice d'une variable aléatoire dans deux cas particuliers. Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $E[X]$ l'espérance de X.

A. Étude d'une première variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $V = 2^U$. La variable aléatoire V ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 (lorsque $U = 0$) et 2 (lorsque $U = 1$).

1. Montrer que $P(V = 2) = p$.
2. Déterminer la loi de V en fonction de p. On donnera le résultat sous la forme d'un tableau.
3. On définit $g_U = E[2^U]$; on a donc simplement $g_U = E[V]$. Calculer la valeur de g_U en fonction de p.
4. Montrer que si $g_U = 2$, alors la variable aléatoire U suit une loi certaine.

B. Étude d'un autre cas

On se donne à présent une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On note $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. On pose $g_X = E[2^X]$ et $h_X = E[(-1)^X]$.

1. Exprimer $P(X = 2)$ en fonction de p et q.

   On va à présent exprimer h_X et g_X en fonction de p et de q.
2. On définit $Z = (-1)^X$. Donner les deux valeurs que peut prendre la variable aléatoire Z.
3. Calculer $P(Z = 1)$ en fonction de q.
4. Montrer que $h_X = 1 - 2q$.
5. Calculer aussi g_X en fonction de p et q grâce au théorème de transfert.
6. Cas particulier : lorsque X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, calculer g_X et h_X.

C. Caractérisation de la loi

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - 2y = \dfrac{1}{3} \\ 4 - 3x - 2y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

   où x et y sont des inconnues réelles. Résoudre ce système.
2. On se donne à nouveau une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On *suppose* que $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$. Montrer qu'alors X suit la loi uniforme sue $\{0, 1, 2\}$.
3. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi uniforme si, et seulement si, $E[2^X] = \dfrac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \dfrac{1}{3}$.