

◆ Révisions – Février 2026 (suite)

Algèbre (2019)

Dans tout ce qui suit, on pourra identifier, selon la convention habituelle, un élément de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne qui lui est canoniquement associée.

On se donne les matrices J et P suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, I_3 désignera la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice P est inversible et que son inverse vérifie :

$$P^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un nombre réel non nul que l'on précisera.

2. Montrer que 0 est valeur propre de la matrice J ; on note E_0 le sous-espace propre associé.
3. Déterminer une base de E_0 .
4. Montrer que $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de J . Déterminer la valeur propre associée.
5. Calculer le rang de $J - 3I_3$. En déduire la dimension du sous-espace propre E_3 (E_3 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3).
6. Montrer que J est diagonalisable : en particulier, donner une matrice D diagonale telle que $PD = JP$.
7. Calculer aussi $P^{-1}J^n P$ pour tout entier naturel n non nul (on attend le résultat sous la forme d'une matrice 3×3 dont on donnera les coefficients).
8. Grâce à ce qui précède, et sans effectuer de récurrence, prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $J^n = 3^{n-1}J$.

Solution.

1. 1^{ère} méthode. Soit a, b et c des réels. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ -x + y + z = b & L_2 \\ -y + z = c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ y + 2z = b + a & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -y + z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = a & L_1 \\ y + 2z = b + a & L_2 \\ 3z = c + b + a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{a+b+c}{3} = a & L_1 \\ y + 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = b + a \\ z = \frac{a+b+c}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2a-b-c}{3} \\ y = \frac{a+b-2c}{3} \\ z = \frac{a+b+c}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ i.e.

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2^{de} méthode. Posons $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$$

donc $P \times \frac{1}{3}Q = I_3$ ce qui montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$ i.e.

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2.** 1^{ère} méthode. Comme les trois colonnes de J sont égales, l'espace engendré par ses trois colonnes est $\text{Im}(J) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, par le théorème du rang, $\dim(\ker(J)) = 3 - \dim(\text{Im}(J)) = 3 - 1 = 2$. Or, par définition, $E_0 = \ker(J)$ donc $\dim(E_0) = 2 > 0$ ce qui montre que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A}$.

2^{de} méthode. Soit x, y et z trois réels. Alors,

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff x + y + z = 0.$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul tel que $JX = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J}$.

- 3.** Ce qui précède assure que

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E_0 = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))}$. $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de E_0 .

- 4.** $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, comme $(1, 1, 1)$ n'est pas le vecteur nul, on conclut que

$\boxed{(1, 1, 1) \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } 3}$.

5. Posons $K = J - 3I_3$. Ainsi, $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ -2x + y + z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système a deux pivots dont le rang de K est 2. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(E_3) = \dim(\ker(K)) = 3 - 2$ i.e. $\boxed{\dim(E_3) = 1}$.

6. On a $\dim(E_0) + \dim(E_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc, par théorème, $\boxed{J \text{ est diagonalisable}}$. (On peut aussi invoquer le théorème spectral puisque que J est symétrique à coefficients réels). On remarque que $1 + (-1) + 0 = 0$ et $0 + 1 + (-1) = 0$ donc $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 0. De plus, on a vu que $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3 donc $PD = JP$ (ou, de façon équivalente,

$$D = P^{-1}JP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Pour tout entier $n \geq 1$, $P^{-1}J^n P = D^n$ donc, comme D est diagonale,

$$\boxed{P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}.$$

8. On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} J^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{3^n}{3} J \end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 1, J^n = 3^{n-1}J}$.

Analyse (2015)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Premières propriétés

- Calculer u_1 et u_2 .
- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Divergence en $+\infty$

- On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L . Montrer que l'on aboutit à une absurdité.
- Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Obtention d'un équivalent

On définit la suite (a_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = e^{u_n}$.

- Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (a_n) .
- Étudier les variations sur $[0; 1]$ de la fonction $f : x \mapsto e^x - (1 + x)$ et en déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $e^x \geq 1 + x$.
- Étudier les variations sur $[0; 1]$ de la fonction $g : x \mapsto 1 + ex - e^x$ et en déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $e^x \leq 1 + ex$.
- Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{a_n} \leq e^{\frac{1}{a_n}}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geq 1$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ln(n + 1)$.
- Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln(ne + 1)$.
- Donner un équivalent simple de (u_n) .

Solution.

- $u_1 = u_0 + e^{-u_0} = 0 + e^0$ donc $\boxed{u_1 = 1}$ et, de même, $\boxed{u_2 = 1 + e^{-1}}$.
 - On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n) : \ll u_n \geq 0 \gg$.
 - **Initialisation.** $u_0 = 0 \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors, $u_n \geq 0$ et, comme $\exp$ est à valeurs positives, $e^{-u_n} \geq 0$ donc $u_n + e^{-u_n} \geq 0$ i.e. $u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie.
 - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0}$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
- Si (u_n) converge L alors (u_{n+1}) converge aussi vers L . Or, comme la fonction $x \mapsto x + e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions continues, $u_n + e^{-u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L + e^{-L}$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L + e^{-L}$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $L = L + e^{-L}$ donc $e^{-L} = 0$ ce qui est absurde puisque la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 - Comme (u_n) est croissante et qu'elle ne converge pas d'après la question précédente, le théorème des suites monotones assure que $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.
- Comme la fonction $\exp$ est à valeurs positives, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n > 0}$. De plus, comme (u_n) est croissante et comme la fonction $\exp$ est croissante, par composition, $\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$.
 - La fonction f est dérivable comme différence de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = e^x - 1$. Or, $x \geq 0$ donc, par croissance de $\exp$, $e^x \geq e^0$ i.e. $e^x \geq 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; 1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \geq f(0)$ i.e. $f(x) \geq 0$ car $f(0) = e^0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$. On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0; 1], e^x - (1 + x) \geq 0 \text{ donc, pour tout } x \in [0; 1], e^x \geq 1 + x}$.
 - La fonction g est dérivable comme différence de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = e - e^x$. Or, $x \leq 1$ donc, par croissance de $\exp$, $e^x \leq e^1$ i.e. $e^x \leq e$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0; 1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \geq g(0)$ i.e. $g(x) \geq 0$ car $g(0) = 1 + 0 - e^0 = 1 - 1 = 0$. On a donc montré que, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 + ex - e^x \geq 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0; 1], 1 + ex \geq e^x}$.

- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ donc $\frac{1}{a_n} > 0$. De plus, la suite (a_n) est croissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_0$. Or, $a_0 = e^{u_0} = e^0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} \in [0; 1]$ donc, en appliquant la question précédente avec $x = \frac{1}{a_n}$ on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 1 + \frac{1}{a_n} \leq e^{\frac{1}{a_n}}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n} e^{e^{-u_n}} = a_n e^{\frac{1}{a_n}} = a_n e^{\frac{1}{a_n}}.$$

Or, $e^{\frac{1}{a_n}} \geq 1 + \frac{1}{a_n}$ donc, comme $a_n > 0$, $a_n e^{\frac{1}{a_n}} \geq a_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ i.e. $a_{n+1} \geq a_n + 1$.

Ainsi, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 1}$.

- e. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ donc, en reconnaissant une somme télescopique, $a_n - a_0 \geq n$. Or, $a_0 = 1$ donc $a_n \geq n + 1$. Ainsi, $e^{u_n} \geq n + 1$ donc, par croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[$, $u_n \geq \ln(n + 1)$.

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ln(n + 1)}$.

- f. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{1}{a_n}} \leq 1 + e^{\frac{1}{a_n}}$ donc, comme $a_n > 0$, $a_n e^{\frac{1}{a_n}} \leq a_n + e$ i.e. $a_{n+1} \leq a_n + e$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \leq e$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} e$ i.e. $a_n - a_0 \leq ne$. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq ne + 1$ donc, en composant avec $\ln$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(ne + 1)}$.

- g. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(n + 1) \leq u_n \leq \ln(ne + 1)$. Or, pour tout $n > 0$, $\ln(n + 1) = \ln(n(1 + \frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $\ln(ne + 1) = \ln(n(e + \frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(e + \frac{1}{n})$ donc, pour tout $n > 0$,

$$\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln(n) + \ln\left(e + \frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n > 1$, $\ln(n) > 0$ donc

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Par continuité de $\ln$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{1}{n}\right) = \ln(e) = 1$

donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} =$

0. Ainsi, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$ donc,

finally, on conclut que

$$\boxed{u_n \sim \ln(n)}.$$

Probabilités (2023)

Dans cet exercice, on fixe p et q deux réels appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

On considère la situation d'un chat domestique. Son propriétaire quitte chaque matin la maison et ne rentre que le soir. Chaque jour, à l'instant du départ de son propriétaire, le chat est confronté à un choix : ou bien rester à la maison, ou bien décider de passer la journée dehors. Les ouvertures de la maison étant toutes closes, et la porte d'entrée de la maison ne disposant par de chatière, le chat devra passer sa journée soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de la maison. On se rend compte que, lorsque le chat choisit de rester à l'intérieur de la maison un jour donné, la probabilité qu'il choisisse de rester de nouveau à la maison le lendemain est égale à p . Lorsque le chat passe la journée dehors, la probabilité qu'il décide de rester dans la maison le lendemain vaut q .

Tout ceci se déroule sur une période de temps où les jours sont indexés par $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire qu'ils sont numérotés 1, 2, 3, ... ; de façon générale, un jour possède un numéro n non nul. Ceci autorise, pour tout entier naturel n strictement positif, à considérer les événements A_n et B_n suivants :

A_n : « le chat reste à la maison le n -ème jour »

B_n : « le chat passe la journée dehors le n -ème jour ».

Ainsi, B_n est simplement l'événement contraire de A_n . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. On suppose qu'au premier jour le chat choisit de rester la journée dehors, ainsi $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. Quelle relation simple existe, pour tout entier naturel n non nul, entre a_n et b_n ?
2. On considère les égalités suivantes, dont certaines traduisent correctement l'énoncé, et d'autres non :

$$\begin{array}{llll} P_{A_n}(A_n) = p ; & P_{A_{n+1}}(A_n) = p ; & P(A_n \cap A_{n+1}) = p ; & P_{A_n}(B_{n+1}) = p ; \\ P_{A_n}(A_{n+1}) = p ; & P_{A_n}(B_{n+1}) = q ; & P_{B_n}(A_{n+1}) = q ; & P_{B_n}(A_{n+1}) = p. \end{array}$$

Recopier sur votre copie les égalités justes, c'est-à-dire celles qui traduisent l'énoncé correctement. On ne demande pas de corriger les autres. On rappelle que la notation $P_X(Y)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement Y sachant l'événement X .

3. Donner les valeurs des $P_{B_n}(B_n)$ et de $P_{B_n}(B_{n+1})$ pour tout entier naturel n non nul.
4. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a la relation :

$$a_{n+1} = (p - q)a_n + q.$$

5. On note $\ell = \frac{q}{1 + q - p}$.

- a. Montrer que $1 + q - p$ est non nul (et donc que le réel ℓ est bien défini).
- b. Simplifier l'expression $(p - q)\ell + q$.
- c. Montrer que l'on a $a_n = -\ell(p - q)^{n-1} + \ell$ pour tout entier naturel n non nul.
Indication : raisonner par récurrence.
- d. Pour $n \geq 1$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si la chat reste à la maison le n -ème jour, et valant 0 sinon. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n en fonction de a_n .

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné que $B_n = \overline{A_n}$, $P(B_n) = 1 - P(A_n)$ donc $b_n = 1 - a_n$.
2. L'énoncé permet d'affirmer que $P_{A_n}(A_{n+1}) = p$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = q$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $P_{B_n}(B_n) = 1$ et donc, comme P_{B_n} est une probabilité et $B_{n+1} = \overline{A_{n+1}}$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1})$ donc $\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - q}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements A_n et B_n forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n p + b_n q = a_n p + (1 - a_n)q \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{a_{n+1} = (p - q)a_n + q}$.

5. a. Par hypothèse, $q > 0$ donc $q - p > -p$ et $p < 1$ donc $-p > -1$. Par suite, $q - p > -1$ donc $1 + q - p > 0$. En particulier, $\boxed{1 + q - p \neq 0}$ donc ℓ est bien définie.
- b. On a

$$\begin{aligned} (p - q)\ell + q &= \frac{(p - q)q}{1 + q - p} + q = \frac{pq - q^2 + q(1 + q - p)}{1 + q - p} \\ &= \frac{pq - q^2 + q + q^2 - pq}{1 + q - p} = \frac{q}{1 + q - p} \end{aligned}$$

donc $\boxed{(p - q)\ell + q = \ell}$.

- c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $H_n : \ll a_n = -\ell(p - q)^{n-1} + \ell \gg$.

Par hypothèse, $a_1 = 0$ et $-\ell(p - q)^{1-1} + \ell = \ell(p - q)^0 + \ell = \ell \times 1 + \ell = 0$ donc H_1 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que H_k est vraie c'est-à-dire que $a_k = -\ell(p - q)^{k-1} + \ell$. Alors, d'après les résultats des questions 4. et 5.a.,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (p - q)a_k + q = (p - q) \left[-\ell(p - q)^{k-1} + \ell \right] + q \\ &= -\ell(p - q)^{k+1-1} + (p - q)\ell + q = -\ell(p - q)^{k+1-1} + \ell \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

Ainsi, par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_n = -\ell(p - q)^{n-1} + \ell}$.

- d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre a_n . On a donc $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = a_n \text{ et } \mathbf{V}(X_n) = a_n(1 - a_n)}$.