

◆ Révisions – février 2026

Algèbre (2016)

Dans tout cet exercice, les matrices considérées sont à coefficients réels. On note, de plus, dans tout l'exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A .

1. Diagonalisation de A

- a.
 - i. Calculer le rang de f .
 - ii. En déduire la dimension du noyau de f .
 - iii. Montrer que 0 est une valeur propre de f , et que la famille $((-1, 2, 0))$ est une base du sous-espace propre associé.
- b.
 - i. Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$.
 - ii. Montrer que 8 est valeur propre de f , et donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 8. Les coefficients du ou des vecteurs propres formant cette base seront des entiers.
- c.
 - i. Calculer $f(1, -1, 0)$.
 - ii. En déduire une troisième valeur propre de f , et donner une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre.
- d. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
- e. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer l'inverse de P .
- f. Donner une relation entre P^{-1} , A , P et D .

2. Résolution d'une première équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices N , de taille 3×3 , à coefficients réels, telles que :

$$(E) \quad N^3 = D.$$

- a. Question Préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - i. l'équation $x^3 = 8$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$;
 - ii. l'équation $x^3 = -1$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$.
- b. Soit N une matrice qui vérifie (E). Montrer qu'alors $DN = ND$.
- c. En déduire que la matrice N est diagonale. On pourra commencer par écrire $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et en déduire un système d'équations portant sur les coefficients de la matrice N .
- d. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice N qui vérifie (E), et donner cette matrice.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices M , de taille 3×3 , telles que :

$$(E') \quad M^3 = A.$$

a. Soit M une matrice de taille 3×3 . Montrer que :

$$M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D.$$

b. En déduire la ou les solutions de (E') .

c. Existe-t-il des matrices M à coefficients réels telles que $M^2 = A$?

Solution.

1. a. i. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} -2x - y + z = 0 & L_1 \\ 2x + y + 7z = 0 & L_2 \\ 8z = 0 & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 & L_1 \\ 8z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 8z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases}$$

Le dernier système possède 2 pivots donc est de rang 2. On en déduit que $\text{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\text{rg}(f) = 2}$.

ii. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - \text{rg}(f)$ donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = 1}$.

iii. On sait que $\ker(f)$ est l'espace propre associé à 0 donc, comme $\dim(\ker(f)) > 0$, $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } f}$. De plus,

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ -2 + 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f((-1, 2, 0)) = (0, 0, 0)$ i.e. $(-1, 2, 0) \in \ker(f)$. Comme $\dim(\ker(f)) = 1$ et $(-1, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$, on conclut que $\boxed{((-1, 2, 0)) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

b. i. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 8(x, y, z) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ 8z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 8x \\ 2x + y + 7z = 8y \\ 8z = 8z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -10x - y + z = 0 \\ 2x - 7y + 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 10x + y \\ 2x - 7y + 7(10x + y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 10x + y \\ 72x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$ est $\boxed{\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}}$.

- ii. D'après la question précédente, $(0, 1, 1)$ est un vecteur non nul tel que $f(0, 1, 1) = 8(0, 1, 1)$ donc $\boxed{8 \text{ est valeur propre de } f}$. De plus $E_8(f) = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 1))$ donc $\boxed{((0, 1, 1)) \text{ est une base de } E_8(f)}$.

c. i. Comme

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 2-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)}.$$

- ii. Ainsi, $f(1, -1, 0) = -1(1, -1, 0)$ donc, comme $(1, -1, 0) \neq (0, 0, 0)$, on conclut que $\boxed{-1 \text{ est une valeur propre de } f}$.

De plus, on sait que la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à 3 donc $\dim(E_{-1}(f)) \leq 3 - \dim(E_0(f)) - \dim(E_8(f)) = 1$ et, comme $\dim(E_{-1}(f)) \geq 1$, on conclut que $\dim(E_{-1}(f)) = 1$. On en déduit que $E_{-1}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$ donc $\boxed{((1, -1, 0)) \text{ est une base de } E_{-1}(f)}$.

- d. L'endomorphisme f admet 3 valeurs propres distinctes. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on conclut, par théorème, que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.
- e. La famille $((-1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 0))$ est obtenue en concaténant des bases de $E_{-1}(f)$, $E_8(f)$ et $E_0(f)$ (car $(-1, 1, 0) = -1(1, -1, 0)$ engendre également $E_{-1}(f)$) donc, par théorème, elle est libre. Comme c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Dès lors, sa matrice dans la base canonique est inversible i.e. $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} -x - z = a & L_1 \\ x + y + 2z = b & L_2 \\ y = c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} -x - z = a & L_1 \\ y = c & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ x + y + 2z = b & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x - z = a & L_1 \\ y = c & L_2 \\ y + z = a + b & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - z = a & L_1 \\ y = c & L_2 \\ z = a + b - c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2a - b + c \\ y = c \\ z = a + b - c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

- f. Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base formée par des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -1 , 8 et 0 , on a, par propriété, $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

2. Résolution d'une première équation matricielle

- a.** i. D'une part, $2^3 = 8$ et, d'autre part, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Ainsi, l'unique solution réelle de l'équation $x^3 = 8$ est $x = 2$.
- ii. De même, $(-1)^3 = -1$ donc l'unique solution réelle de $x^3 = -1$ est $x = -1$.
- b.** Comme N vérifie (E), $N^3 = D$ donc $DN = N^3N = N^4 = NN^3 = ND$ donc $DN = ND$.
- c.** Écrivons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors,

$$DN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 8d & 8e & 8f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 8b & 0 \\ -d & 8e & 0 \\ -g & 8h & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme $ND = DN$,

$$\begin{cases} -b = 8b \\ -c = 0 \\ 8d = -d \\ 8f = 0 \\ -g = 0 \\ 8h = 0 \end{cases}$$

donc $b = c = d = f = g = h = 0$. On en déduit que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ i.e.

N est diagonale.

- d.** En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, on a $N^3 =$

$\begin{pmatrix} d_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^3 \end{pmatrix}$ donc, comme $N^3 = D$, $d_1^3 = -1$, $d_2^3 = 8$ et $d_3^3 = 0$. On déduit alors de

la question **a.** que $d_1 = -1$, $d_2 = 2$ et $d_3 = 0$. Ainsi, la seule matrice possible est

$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si N est cette matrice alors on a bien $N^3 = D$

donc $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'unique matrice qui vérifie (E).

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

a. Comme $A = PDP^{-1}$,

$$M^3 = A \iff M^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^3P = D.$$

Or, par associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned}(P^{-1}MP)^3 &= (P^{-1}MP)(P^{-1}MP)(P^{-1}MP) \\ &= P^{-1}M(PP^{-1})M(PP^{-1})MP \\ &= P^{-1}MI_3MI_3MP = P^{-1}M^3P\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D}.$$

b. On déduit de la question précédente et du résultat de la question 2. que

$$M^3 = A \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned}P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution de (E') est $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. En raisonnant comme précédemment, si $M^2 = A$ alors $(P^{-1}MP)^2 = D$. Or, en raisonnant comme dans la question 2., si $N^2 = D$ alors N est diagonale et ses éléments diagonaux vérifient $d_1^2 = -1$, $d_2^2 = 8$ et $d_3^2 = 0$. Or, il n'existe pas de réel d_1 tel que $d_1^2 = -1$ donc l'équation $N^2 = D$ n'a pas de solution. On conclut qu'il n'existe pas de matrices à coefficients réels M telles que $M^2 = A$.

Analyse (2022)

On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$.

1. a. Calculer la dérivée de la fonction $f : t \mapsto \ln(t+1)$ sur $[0; 1]$.
b. En déduire la valeur de I_0 .
2. a. En effectuant le changement de variable $u = t+1$, prouver que l'on a :

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u} du.$$

- b. En déduire la valeur de I_1 .
3. a. Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, donner le signe de $\frac{t^n}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 b. En déduire que la suite (I_n) est positive.
4. a. Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, comparer $\frac{t^n}{t+1}$ et $\frac{t^{n+1}}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 b. Comparer I_n et I_{n+1} et donner la monotone de la suite (I_n) .
5. Montrer que la suite (I_n) admet une limite finie, et que cette limite est positive.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
7. En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n)
8. Le but de cette question est de donner un équivalent simple de (I_n) .
 a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la double inégalité,

$$2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n.$$

- b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n}{n+1} \leq 2nI_n \leq 1.$$

- c. Donner la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers l'infini.
 d. Conclure.
9. On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $K_n = \int_0^1 t^n \ln(t+1) dt$.
 a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}$$

(On pourra réaliser une intégration par parties.)

- b. Prouver que la suite (K_n) tend vers 0.
 c. Montrer que $K_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.

Solution.

1. a. La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in [0; 1]$, $f'(t) = \frac{1}{t+1}$.
 b. On en déduit que

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = \ln(2) - \ln(1)$$

donc $I_0 = \ln(2)$.

2. a. La fonction $\varphi : u \mapsto u - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ donc, avec le changement de variable $u = t + 1$ (c'est-à-dire $t = \varphi(u)$), on a $du = dt$, et, comme $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(2) = 1$,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_1^2 \frac{u-1}{u} du = \int_1^2 1 du - \int_1^2 \frac{1}{u} du$$

donc

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u} du.$$

b. On en déduit que

$$I_1 = 1 - [\ln(u)]_1^2 \text{ soit } \boxed{I_1 = 1 - \ln(2)}.$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1]$. Alors, $t^n \geq 0$ et $t + 1 > 0$ donc $\boxed{\frac{t^n}{t+1} \geq 0}$.

b. Par positivité de l'intégrale, comme $0 < 1$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt \geq 0$ donc la suite $\boxed{(I_n) \text{ est positive}}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1]$. Alors, $t \leq 1$ donc, en multipliant par $\frac{t^n}{t+1}$, $\boxed{\frac{t^{n+1}}{t+1} \leq \frac{t^n}{t+1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $\frac{t^{n+1}}{t+1} \leq \frac{t^n}{t+1}$ donc, comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$, c'est-à-dire $I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi, la suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

5. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} + \frac{t^n}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{t+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t+1)}{t+1} dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}.$$

7. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ell$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \ell$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n + I_{n+1} = 2\ell$. Or, par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, grâce à la question précédente et par unicité de la limite, $2\ell = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.

8. a. Comme la suite (I_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$ donc, d'une part, $2I_{n+1} \leq I_n + I_{n+1}$ donc $2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ et, d'autre part, $I_{n+1} + I_n \leq 2I_n$ donc $\frac{1}{n+1} \leq 2I_n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après ce qui précède, $\frac{n}{n+1} \leq 2nI_n$. D'autre part, si $n > 0$, ce qui précède assure aussi (en remplaçant $n+1$ par n) que $2I_n \leq \frac{1}{n}$ donc $2nI_n \leq 1$. De plus, cette inégalité est encore clairement vérifiée lorsque $n = 0$ donc, finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \leq 2nI_n \leq 1}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{1}{2}$. Or, $\frac{n}{2(n+1)} \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et ainsi, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{2}}$.

d. Comme $\frac{1}{2} \neq 0$, on conclut que $nI_n \sim \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{I_n \sim \frac{1}{2n}}$.

9. a. Considérons les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto \ln(t+1)$ définies sur $[0; 1]$. Alors, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ avec $u' : t \mapsto nt^{n-1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t+1}$. Ainsi, en intégrant par parties,

$$I_n = [t^n \ln(t+1)]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1} \ln(t+1) dt = \ln(2) - n \int_0^1 t^{n-1} \ln(t+1) dt$$

donc

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}.$$

- b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)K_n = \ln(2) - I_{n+1}$ donc $K_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par différence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0.$$

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)K_n = \ln(2) - I_{n+1}$ donc $\frac{(n+1)K_n}{\ln(2)} = 1 - \frac{I_{n+1}}{\ln(2)}$. Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)K_n}{\ln(2)} = 1. \text{ Ainsi, } K_n \sim \frac{\ln(2)}{n+1} \text{ et donc } \boxed{K_n \sim \frac{\ln(2)}{n}}.$$

Probabilités (2022)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la notion de fonction génératrice d'une variable aléatoire dans deux cas particuliers. Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $E[X]$ l'espérance de X .

A. Étude d'une première variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On définit $V = 2^U$. La variable aléatoire V ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 (lorsque $U = 0$) et 2 (lorsque $U = 1$).

1. Montrer que $P(V = 2) = p$.
2. Déterminer la loi de V en fonction de p . On donnera le résultat sous la forme d'un tableau.
3. On définit $g_U = E[2^U]$; on a donc simplement $g_U = E[V]$. Calculer la valeur de g_U en fonction de p .
4. Montrer que si $g_U = 2$, alors la variable aléatoire U suit une loi certaine.

B. Étude d'un autre cas

On se donne à présent une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On note $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. On pose $g_X = E[2^X]$ et $h_X = E[(-1)^X]$.

1. Exprimer $P(X = 2)$ en fonction de p et q .
On va à présent exprimer h_X et g_X en fonction de p et de q .
2. On définit $Z = (-1)^X$. Donner les deux valeurs que peut prendre la variable aléatoire Z .
3. Calculer $P(Z = 1)$ en fonction de q .
4. Montrer que $h_X = 1 - 2q$.
5. Calculer aussi g_X en fonction de p et q grâce au théorème de transfert.
6. Cas particulier : lorsque X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, calculer g_X et h_X .

C. Caractérisation de la loi

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - 2y = \frac{1}{3} \\ 4 - 3x - 2y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues réelles. Résoudre ce système.

2. On se donne à nouveau une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On suppose que $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$. Montrer qu'alors X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.
3. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi uniforme si, et seulement si, $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$.

Solution.

A. Étude d'une première variable aléatoire

1. $P(V = 2) = P(U = 1)$ et, comme $U \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $P(U = 1) = p$ donc $P(V = 2) = p$.
2. Comme V ne prend que les valeurs 1 ou 2, $P(V = 1) = 1 - P(V = 2) = 1 - p$ donc la loi de V est donnée par le tableau suivant :

k	1	2
$P(V = k)$	$1 - p$	p

3. On en déduit que $g_U = E[V] = 1 \times (1 - p) + 2 \times p$ c'est-à-dire $g_U = p + 1$.
4. Si $g_U = 2$ alors $p + 1 = 2$ donc $p = 1$. Ainsi, dans ce cas, $U \hookrightarrow \mathcal{B}(1)$ donc U suit une loi certaine égale à 1.

B. Étude d'un autre cas

1. Les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$ forment un système complet d'événements donc $P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ c'est-à-dire $P(X = 2) = 1 - p - q$.
2. Si X est pair alors $Z = 1$ et si X est impair alors $Z = -1$.
3. Ainsi, $(Z = 1) = (X = 0) \cup (X = 2)$ et cette union est disjointe donc

$$P(Z = 1) = P(X = 0) + P(X = 2) = p + 1 - p - q$$

soit $P(Z = 1) = 1 - q$.

4. On a également $P(Z = -1) = P(X = 1)q$ donc, par définition,

$$h_X = E[Z] = (-1) \times q + 1 \times (1 - q)$$

c'est-à-dire $h_X = 1 - 2q$.

5. Par le théorème de transfert,

$$g_X = E[2^X] = \sum_{k=0}^2 2^k P(X = k) = 2^0 \times p + 2^1 \times q + 2^2 \times (1 - p - q) = p + 2q + 4 - 4p - 4q$$

c'est-à-dire $g_X = 4 - 3p - 2q$.

6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$ alors $p = q = \frac{1}{3}$ donc $g_X = 4 - 3 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $g_X = \frac{7}{3}$
 et $h_X = 1 - 2 \times \frac{1}{3}$ soit $h_X = \frac{1}{3}$.

C. Caractérisation de la loi

1. Notons (S) le système de l'énoncé.

$$(S) \iff \begin{cases} 3 - 6y = 1 \\ 12 - 9x - 6y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y = 2 \\ 9x = 5 - 6y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ 9x = 5 - 6 \times \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S) est $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2. Comme $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$, d'après les résultats de la partie **B.**, $4 - 3p - 4q = \frac{7}{3}$ et $1 - 2q = \frac{1}{3}$ en posant $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, $p = q = \frac{1}{3}$ et donc $P(X = 2) = 1 - p - q = \frac{1}{3}$. Dès lors, $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2)$ donc X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.
3. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, d'après la question **B.6.**, $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$. Réciproquement, si $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$ alors, d'après la question précédente, X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

Ainsi, on conclut que

X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ si et seulement si $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$.

Probabilités (2019)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a \sin^2(x) & \text{si } x \in [0; \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Valeur de a

- On pose $I = \int_0^\pi \sin^2(x) dx$ et $J = \int_0^\pi \cos^2(x) dx$. Calculer $I + J$.
- Donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^\pi \cos(2x) dx$.
- Montrer que l'on a $J - I = 0$.
- En déduire la valeur de I .
- Déterminer la valeur du nombre réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité. On conserve cette valeur par la suite.

On considère désormais X , une variable aléatoire de densité f .

2. Espérance de X

- Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$.
- En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\int_0^\pi x \cos(2x) dx$.
- Trouver des coefficients réels α et β tels que, pour tout réel x , on a :

$$\sin^2(x) = \alpha + \beta \cos(2x).$$

- En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance que l'on calculera.

3. Fonction de répartition

- Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$. On pourra utiliser la question 2.c..
- Si x est un réel n'appartenant pas à l'intervalle $[0; \pi]$, calculer la probabilité $\mathbf{P}(X \leq x)$.
- Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
- Calculer la probabilité de l'évènement $(|X| \leq \frac{\pi}{2})$.

Solution

1. Valeur de a

- Par linéarité de l'intégrale,

$$I + J = \int_0^\pi \sin^2(x) + \cos^2(x) dx = \int_0^\pi 1 dx = [x]_0^\pi$$

donc $I + J = \pi$.

- Notons $h : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$. Alors, pour tout réel x , $h'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x) = \cos(2x)$.
On en déduit que

$$K = \int_0^\pi \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \sin(2\pi) - \frac{1}{2} \sin(0)$$

donc $K = 0$.

- Par linéarité de l'intégrale,

$$J - I = \int_0^\pi \cos^2(x) - \sin^2(x) dx.$$

De plus, par les formules de duplication, pour tout réel x , $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$
donc $J - I = K$ i.e. $J - I = 0$.

- On en déduit que $I = J$ donc, comme $I + J = \pi$, $2I = \pi$ i.e. $I = \frac{\pi}{2}$.
- La fonction f est continue par morceaux et positive (si $a \geq 0$) sur $\mathbb{R}$ donc f est une densité de probabilité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ i.e. $\int_0^\pi a \sin^2(x) dx = 1$.
Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que f est une densité de probabilité si et seulement si $aI = 1$ i.e. si et seulement si $a = \frac{2}{\pi}$.

2. Espérance de X

- Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\frac{1}{4} \cos(2x)$.
- Considérons les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto \cos(2x)$. Alors, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos(2x) dx &= \left[x \times \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\ &= 0 - \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^\pi = - \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

donc $\int_0^\pi x \cos(2x) dx = 0$.

c. Par les formules d'addition, pour tout réel x , $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc on en déduit que $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

d. Comme f est nulle en dehors de $[0; \pi]$, X admet une espérance si et seulement si $\int_0^\pi xf(x) dx$ converge, ce qui est le cas car $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0; \pi]$. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi xf(x) dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos(2x) dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^\pi - 0 \right) \end{aligned}$$

donc $\mathbf{E}(X) = \frac{\pi}{2}$.

3. Fonction de répartition

a. On a vu que, pour tout réel x , $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ donc une primitive de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

b. Distinguons deux cas.

Si $x < 0$ alors $\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt$ donc $\mathbf{P}(X \leq x) = 0$.

Si $x > \pi$ alors $\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \sin^2(t) dt$ donc $\mathbf{P}(X \leq x) = 1$.

c. Si $x \in [0; \pi]$ alors, d'après la question a.,

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{2}{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^x = \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2x).$$

On conclut que la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin(2x) & \text{si } x \in [0; \pi] \\ 1 & \text{si } x > \pi \end{cases}.$$

d. Comme $(|X| \leq \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$, on a

$$\mathbf{P}\left(|X| \leq \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{P}\left(X \leq \frac{\pi}{2}\right) - \mathbf{P}\left(X < -\frac{\pi}{2}\right).$$

Or, X est une variable aléatoire à densité donc $\mathbf{P}(X < -\frac{\pi}{2}) = \mathbf{P}(X \leq -\frac{\pi}{2})$ donc

$$\mathbf{P}\left(|X| \leq \frac{\pi}{2}\right) = F_X\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_X\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin(\pi) - 0$$

i.e. $\mathbf{P}(|X| \leq \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2017)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.
 - a. Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f .
 - b. Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f .
 - c. Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2.
 - a. Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.
 - b. Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w) .
 - c. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w) . Donner l'expression de P .
 - d. Exprimer A en fonction de N , P et P^{-1} .
3.
 - a. Calculer N^2 et N^3 .
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, N^n est la matrice nulle.
 - c. Dédire des questions précédentes, pour tout entier naturel n , la valeur de A^n .

Solution.

1. a. Première méthode. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ x - z = 0 & L_2 \\ 2x - y - z = 0 & L_3 \end{cases}$$

associé à la matrice A . Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \\ -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_3 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

Le dernier système est échelonné et contient 2 pivots donc $\text{rg}(A) = 2$ et ainsi $\boxed{\text{rg}(f) = 2}$.

Seconde méthode. On sait que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Comme le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, c'est aussi la dimension de l'espace engendré par ses lignes. Or, ici, les deux premières lignes sont identiques et la troisième ligne est clairement non proportionnelle à la première donc les lignes de A engendrent un espace de dimension 2. Ainsi, $\text{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\text{rg}(f) = 2}$

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(f) = 3 - 2$ donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = 1}$.

b. Comme $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 2-1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(u) = (0, 0, 0)$ donc $u \in \ker(f)$. Ainsi, u est un vecteur non nul de $\ker(f)$ donc, comme $\dim(\ker(f)) = 1$, on conclut que $\boxed{(u) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

c. Considérons des réels a, b et c tels que $au + bv + cw = 0$. Alors, $(a, a+c, a-b) = (0, 0, 0)$ donc $a = 0$, $a + c = 0$ et $a - b = 0$. On en déduit que $a = 0$, $c = -a = 0$ et $b = a = 0$ donc $a = b = c = 0$. Ainsi, (u, v, w) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on conclut, par théorème, que $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. a. Comme $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{f(v) = u}$ et, comme $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boxed{f(w) = v}$.

b. Comme $f(u) = (0, 0, 0)$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, la matrice de f dans la base (u, v, w) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } (u, v, w) \text{ est } N}$.

c. Par définition,

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

d. D'après la formule de changement de bases, $N = P^{-1}AP$ donc $\boxed{A = PNP^{-1}}$.

3. a. Le calcul donne $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$.

b. Soit un entier $n \geq 3$. Alors, $N^n = N^3 N^{n-3} = 0_3 N^{n-3} = 0_3$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$, $N^n = 0_3$.

c. Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ par convention. Pour $n = 1$, $A^1 = A$. Pour $n = 2$, le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par propriété, pour tout entier naturel n , $A^n = P N^n P^{-1}$ donc, pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = P 0_3 P^{-1} = 0_3$.

Ainsi, on conclut que

$$A^0 = I_3 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 3, \quad A^n = 0_3.$$

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2016)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire deux jetons de l'urne au hasard.

On étudie dans la première partie de l'exercice le cas d'un tirage avec remise et, dans la seconde partie, le cas d'un tirage sans remise lorsque l'urne contient quatre jetons. Les deux parties sont indépendantes.

1. Cas d'un tirage avec remise

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro de premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du second jeton tiré. On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand de ces deux numéros.

- Montrer que la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur un ensemble à préciser. Donner, de même, la loi de X_2 .
- Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
- Soit i un entier naturel compris entre 1 et n .
 - On note A_i l'évènement $(X_1 \leq i)$ et B_i l'évènement $(X_2 \leq i)$. Décrire par une phrase en français ces évènements. Montrer que $P(A_i) = \frac{i}{n}$. Calculer de même $P(B_i)$.
 - Décrire, en français, l'évènement $A_i \cap B_i$. Calculer la probabilité de cet évènement.
 - On appelle F_M la fonction de répartition de la variable aléatoire M . Rappeler la définition de F_M . Donner ensuite la valeur de $F_M(i)$.
 - Déduire de ce qui précède que, pour tout entier i compris entre 1 et n , on a

$$P(M = i) = \frac{2i - 1}{n^2}.$$

2. Cas d'un tirage sans remise, avec $n = 4$.

On suppose dans cette partie que l'urne contient $n = 4$ jetons. On suppose aussi que le tirage est sans remise : le premier jeton n'est donc pas remis dans l'urne avant le tirage du second jeton.

On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré et Y_2 le numéro du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.

- a. Soit j un entier naturel compris entre 1 et 4. Justifier que :

$$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } j \in \{2, 3, 4\} \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

- b. En déduire que $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{4}$. On pourra employer la formule de probabilités totales.

On peut montrer de la même façon que, pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$, $P(Y_2 = i) = \frac{1}{4}$.

On admet ce résultat et on pourra l'utiliser dans la suite.

- c. Donner alors la loi de Y_2 ainsi que l'espérance de cette variable aléatoire.
d. Donner, sans justification, la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) . On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.
e. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2) .

Solution.

1. a. Comme on effectue un tirage au hasard dans un ensemble de n jetons numérotés de 1 à n , X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme il y a remise du jeton tiré, X_2 suit la même loi que X_1 .

- b. Comme il y a remise du jeton tiré, les deux tirages sont indépendants donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

2. a. L'évènement A_i est « le premier numéro tiré est inférieur ou égal à i ». Comme les évènements de la forme $(X_1 = k)$ sont mutuellement incompatibles, on en déduit que

$$P(A_i) = \sum_{k=1}^i P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^i 1 = \frac{1}{n} \times i$$

i.e. $P(A_i) = \frac{i}{n}$.

L'évènement B_i est « le second numéro tiré est inférieur ou égal à i ». Comme X_1

et X_2 ont la même loi, $P(B_i) = P(A_i) = \frac{i}{n}$.

- b. L'évènement $A_i \cap B_i$ est « les deux numéros tirés sont inférieurs ou égaux à i ».

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, A_i et B_i sont indépendants donc $P(A_i \cap B_i) =$

$P(A_i)P(B_i)$ i.e. $P(A_i \cap B_i) = \frac{i^2}{n^2}$.

- c. Par définition, pour tout réel x , $F_M(x) = P(M \leq x)$.

Ainsi, $F_M(i) = P(M \leq i)$. Or, dire que $(M \leq i)$ signifie que X_1 et X_2 sont

inférieures ou égales à i donc $(M \leq i) = A_i \cap B_i$. Ainsi, $F_M(i) = \frac{i^2}{n^2}$.

- d. Pour tout entier i compris entre 1 et n ,

$$\begin{aligned} P(M = i) &= P(M \leq i) - P(M \leq i-1) = F_M(i) - F_M(i-1) \\ &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} = \frac{i^2 - (i^2 - 2i + 1)}{n^2} \\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2} \end{aligned}$$

donc $P(M = i) = \frac{2i-1}{n^2}$.

3. a. Si $Y_1 = 1$ alors le premier jeton tiré est le numéro 1 donc, comme il n'y a pas remise, il n'est plus possible de tirer ce jeton au second tirage. Ainsi, $P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = 0$.

Si $Y_1 \geq 2$ alors il reste dans l'urne trois jetons pour le second tirage dont le jeton 1 donc, comme il y a équiprobabilité des tirages, $P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \frac{1}{3}$ si $j \geq 2$.

Ainsi,

$$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } j \in \{2, 3, 4\} \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}.$$

- b. Comme $(Y_1 = j)_{j \in \{1, 2, 3, 4\}}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1) &= \sum_{j=1}^4 P(Y_1 = j)P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{4}P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) \\ &= \frac{1}{4} \left[0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

et donc $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{4}$.

- c. Comme $Y_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $P(Y_2 = i) = \frac{1}{4}$, on peut affirmer que Y_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

Par théorème, l'espérance de Y_2 est $E(Y_2) = \frac{1+4}{2}$ i.e. $E(Y_2) = \frac{5}{2}$.

- d. La loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$Y_2 \backslash Y_1$	1	2	3	4	Loi de Y_2
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
Loi de Y_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

- e. Par la formule de König-Huygens, $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$. Par le théorème de transfert pour le produit,

$$\begin{aligned} E(Y_1 Y_2) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 ijP(Y_1 = i, Y_2 = j) \\ &= \frac{1}{12} [1 \times (2 + 3 + 4) + 2 \times (1 + 3 + 4) + 3 \times (1 + 2 + 4) + 4 \times (1 + 2 + 3)] \\ &= \frac{9 + 16 + 21 + 24}{12} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

donc $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{2 \times 35 - 3 \times 25}{12}$ soit $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -\frac{5}{12}$.

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2010)

Pour tout entier naturel n , on considère

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) \, dx.$$

1. a. Montrer que la fonction $F : x \mapsto (x+1)[\ln(x+1) - 1]$ est une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$.
 b. Dédire de la question précédente la valeur de I_0 .
2. a. Justifier que

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

- b. Calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$.
- c. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2} [\ln(2) - J].$$

- d. En déduire la valeur de I_1 .
3. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
 b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
 c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes?
 d. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

- e. Dédire des questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

Solution.

1. a. La fonction F est dérivable sur $] -1; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > -1$,

$$F'(x) = 1 \times [\ln(x+1) - 1] + (x+1) \times \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) - 1 + 1 = \ln(x+1) = f(x)$$

donc F est une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.

- b. Ainsi,

$$I_0 = \int_0^1 \ln(x+1) \, dx = [F(x)]_0^1 = 2(\ln(2) - 1) - 1(\ln(1) - 1) = 2\ln(2) - 2 + 1$$

soit $I_0 = 2\ln(2) - 1$.

2. a. Soit $x > -1$. Alors,

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

donc $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

b. On en déduit que

$$J = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - 0$$

$$\text{soit } J = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

c. Considérons les fonctions $u : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto \ln(x+1)$ de sorte que $u' : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. On définit ainsi deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; +\infty[$ donc, en intégrant par parties,

$$I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2) - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$$

$$\text{Ainsi, } I_1 = \frac{1}{2} [\ln(2) - J].$$

$$\text{d. Dès lors, } I_1 = \frac{1}{2} \left[\ln(2) - \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) \right] \text{ i.e. } I_1 = \frac{1}{4}.$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$ et $x+1 \geq 1$ donc $\ln(x+1) \geq 0$ donc $x^n \ln(x+1) \geq 0$. Comme $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $I_n \geq 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x \leq 1$ donc, en multipliant par $x^n \ln(x+1) \geq 0$, $x^{n+1} \ln(x+1) \leq x^n \ln(x+1)$. Comme $0 < 1$, on en déduit, par croissance de l'intégrale que $\int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ i.e. $I_{n+1} \leq I_n$.

On conclut que (I_n) est décroissante.

c. Les deux questions précédentes montrent que (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, (I_n) converge.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x \leq 1$ donc $x+1 \leq 2$ donc, par croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[$, $\ln(x+1) \leq \ln(2)$ et, en multipliant par $x^n \geq 0$, $x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$. Ainsi, comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$ i.e., par linéarité, $I_n \leq \ln(2) \int_0^1 x^n dx$.

Or,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{donc } I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

e. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Fin du sujet

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2018)

Pour tout réel x , on pose $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ et $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)e^x$.
On admet que les fonctions P et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour tout réel x , $P'(x)$ puis $P'(x) + P(x)$.
2. Calculer, pour tout réel x , $f'(x)$.
3. Soit x un nombre réel. Factoriser $x^3 - x$.
4. Tracer le tableau de variations de f . On fera apparaître les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Justifier que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) < 0$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[-2e; +\infty[$.
7. Donner le signe de f sur $] -\infty; -1]$.
8. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
9. Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 3x^2 + 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que celle-ci est comprise entre 1 et 2.

Solution.

1. Pour tout réel x , $P'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ et $P'(x) + P(x) = 3x^2 - 6x + 5 + x^3 - 3x^2 + 5x - 5$
i.e. $P'(x) + P(x) = x^3 - x$.
2. Pour tout réel x , $f(x) = P(x)e^x$ donc $f'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x = (P'(x) + P(x))e^x$ et
ainsi $f'(x) = (x^3 - x)e^x$.

3. $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ donc $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.

4. Au voisinage de $+\infty$, $P(x) \sim x^3$ donc $f(x) \sim x^3 e^x$ et, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, au voisinage de $-\infty$, $P(x) \sim x^3$ donc $f(x) \sim x^3 e^x$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
signe de x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
signe de $x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
signe de e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f	0 $-14e^{-1}$ -5 $-2e$ $+\infty$ 0 -5 $-14e^{-1}$ $-2e$ -5 $+\infty$						

5. Le maximum de f sur $[-1; 1]$ est -5 donc, $\text{pour tout } x \in [-1; 1], f(x) < 0$.

6. Sur $[1; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $f(1) = -2e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[-2e; +\infty[$.

7. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc on conclut que $\text{pour tout } x \in]-\infty; -1], f(x) < 0$.

8. D'après ce qui précède, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; 1[$. Par ailleurs, f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[-2e; +\infty[$ et $0 \in [-2e; +\infty[$ donc $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$.

On conclut que α est l'unique solution l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

9. Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ équivaut à $x^3 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$ i.e. $P(x) = 0$. Ainsi, α est l'unique solution de $P(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(1) = -2e < 0$ et $f(2) = e^2 > 0$ et f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc $\alpha \in]1; 2[$.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2021)

Dans cet exercice, les matrices sont toutes de taille 3×3 et à coefficients réels. En cas de besoin, on pourra noter I_3 la matrice identité, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement

associé à A .

- Vérifier que le vecteur $(1; 0; 0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.
- Démontrer que 4 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé.

3. *Sans justifier*, donner un réel a tel que le vecteur $(a; 1; 0)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 3. (*On demande seulement la valeur correcte de a*).

Les trois questions précédentes permettent de montrer que A est diagonalisable : on l'admet ici.

4. *Sans justifier*, donner une matrice D diagonale et une matrice P_0 inversible vérifiant les deux conditions suivantes :

$$- D = P_0^{-1}AP_0$$

$$- \text{la matrice } P_0 \text{ est de la forme } P_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ est le réel trouvé plus haut, et}$$

x_0, y_0 et z_0 sont trois réels que l'on précisera.

(*On demande seulement les expressions correctes de D et de P_0 sans justifications.*)

On rappelle que u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

Soit F l'ensemble suivant :

$$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x, y, z) = 4(x, y, z)\}.$$

5. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner une base de F .

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, où a est le réel trouvé à la

question 3.

7. Calculer le produit suivant : $M_{x,y,z} \times D$. Calculer aussi le produit : $A \times M_{x,y,z}$

8. Soit $(x; y; z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le vecteur $(x; y; z)$ appartient à F si, et seulement si, on a la relation $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$.

9. Soit Q une matrice inversible telle que $D = Q^{-1}AQ$. A-t-on obligatoirement $Q = P_0$?

Solution.

1. Étant donné que $(1; 0; 0)$ n'est pas nul et que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le vecteur $(1; 0; 0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

2. On cherche un vecteur non nul $v = (x; y; z)$ tel que $u(v) = 4v$. Matriciellement, cette égalité se traduit par

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 4x \\ 3y + z = 4y \\ 4z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

On voit que $(1; 1; 1)$ est une solution non nul donc 4 est valeur propre de u et un vecteur propre associé est $(1; 1; 1)$.

3. $a = \frac{1}{2}$ (car si $w = (a; 1; 0)$ vérifie $u(w) = 3w$ alors en égalant les première coordonnées dans la base canonique on obtient $a + 1 = 3a$).

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Par définition, F est le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 donc, par théorème, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. Le calcul de la question 2. montrer que $F = \{(y; y; y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1; 1; 1))$ donc $v = (1; 1; 1)$ forme une base de F .
7. D'une part,

$$M_{x,y,z} \times D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 4x \\ 0 & 3 & 4y \\ 0 & 0 & 4z \end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$$A \times M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & x+y+2z \\ 0 & 3 & 3y+z \\ 0 & 0 & 4z \end{pmatrix}$$

8. D'après la question précédente,

$$M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z} \iff \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 3y+z \\ 4z \end{pmatrix} \iff 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (x; y; y) \in F.$$

Ainsi, $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$ si et seulement si $(x; y; y) \in F$.

9. La réponse est non. Par exemple, $(2; 2; 2) \in F$ donc, d'après la question précédente, $M_{2,2,2} \times D = A \times M_{2,2,2}$. De plus $M_{2,2,2}$ est inversible car est triangulaire et aucun de ses termes diagonaux n'est nulle donc $D = M_{2,2,2}^{-1} A M_{2,2,2}$. Pour autant, $M_{2,2,2} \neq P$.

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2003)

Dans tout l'exercice, p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et $q = 1 - p$.

1. a. Justifier que la série $\sum pq^n$ est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} pq^n$.
- b. Justifier la convergence des séries $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ et rappeler (sans démonstration) les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et de $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$.
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = pq^n.$$

- a. Vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$.
- b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- c. Montrer que la variable aléatoire $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
- d. En déduire que X admet une variance et que $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$.
3. Pour tous réels x et y , on définit la matrice

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ y & x+1 \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer que, pour tous réels x et y , la matrice $M(x, y)$ n'est pas inversible si et seulement si

$$(x+1+y)(x+1-y) = 0.$$

- b. En déduire que, pour tous entiers naturels n et m , $M(n, m)$ n'est pas inversible si et seulement si $n + 1 - m = 0$.
4. On considère une variable aléatoire Y définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que la variable aléatoire X de la question 2.. On suppose de plus que Y a la même loi que X et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = M(X(\omega), Y(\omega)).$$

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'évènement A : « Z n'est pas inversible ».

- a. Montrer que $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = n + 1))$.
- b. En déduire que $\mathbf{P}(A) = \frac{pq}{1+q}$.

Solution.

1. a. La série pq^n est égale à la série $p \sum q^n$. Or, comme $0 < p < 1$, $-1 < -p < 0$ et donc $0 < 1 - p < 1$ i.e. $q \in]0; 1[$. Dès lors, par propriété, la série géométrique $\sum q^n$ est convergente. On en déduit que $p \sum q^n$ converge et donc $\boxed{pq^n \text{ est convergente}}$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} pq^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = p \times \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p}$$

donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} pq^n = 1}$.

- b. Comme $q \in]0; 1[$, les séries géométriques dérivées première et seconde $\sum kq^{k-1}$ et

$\sum k(k-1)q^{k-2}$ donc convergente. De plus, par théorème, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}}$

et $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{q}{p^3}}$.

2. a. D'après le résultat de la question 1.a., $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^n = 1$ donc on a bien

$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1}$.

- b. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\mathbf{P}(X = n)$ converge i.e. si et seulement si la série $\sum npq^n$ diverge. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^n kpq^k = pq \sum_{k=1}^n kq^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} pq \times \frac{1}{p^2} = \frac{pq}{p^2}.$$

Ainsi, X admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{q}{p}}$.

- c. Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(n-1)\mathbf{P}(X = n)$ converge i.e. si et seulement si la série $\sum n(n-1)pq^n$ diverge. Or, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)pq^k = pq^2 \sum_{k=1}^n k(k-1)q^{k-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} pq^2 \times \frac{2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(X(X-1)) = \frac{2q^2}{p^2}}$.

- d. Comme $X^2 = X(X-1) + X$, par linéarité, on en déduit que X^2 admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{2q^2 + pq}{p^2}.$$

Par le théorème de König-Huygens, on en déduit que X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{2q^2 + pq}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2 + pq - q^2}{p^2} = \frac{q^2 + pq}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2}$$

donc, comme $p+q=1$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}}$.

3. a. Soit x et y deux réels. Alors, $M(x, y)$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(M(x, y)) = 0$. Or,

$$\det(M(x, y)) = (x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y)$$

donc $\boxed{M(x, y) \text{ n'est pas inversible si et seulement si } (x+1+y)(x+1-y) = 0}$.

- b. Soit n et m deux entiers naturels. Alors, $n \geq 0$ et $m \geq 0$ donc $n+1+m > 0$ et ainsi $(n+m+1)(n+m-1) = 0$ si et seulement si $n+m-1 = 0$. On en déduit que $\boxed{M(n, m) \text{ n'est pas inversible si et seulement si } n+1-m = 0}$.

4. a. Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le résultat de la question 3.b., $A = (X+1-Y=0)$. Ainsi, comme $((X=n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un système complet d'évènements,

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n) \cap A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n) \cap (X+1-Y=0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=n) \cap (n+1-Y=0)$$

i.e. $\boxed{A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((X=n) \cap (Y=n+1))}$.

- b. Comme $((X=n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un système complet d'évènements, l'union précédente est une union disjointe donc

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}((X=n) \cap (Y=n+1)).$$

De plus, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) \mathbf{P}(Y=n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^n pq^{n+1} = p^2 q \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n.$$

Or, comme $0 < q < 1$, $0 < q^2 < 1$ et donc

$$\mathbf{P}(A) = p^2 q \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)}.$$

De plus, $p = 1 - q$ donc on conclut que $\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{pq}{1+q}}$.

Fin du sujet