

◆ Révisions – février 2026

Algèbre (2016)

Dans tout cet exercice, les matrices considérées sont à coefficients réels. On note, de plus, dans tout l'exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A .

1. Diagonalisation de A

- a.
 - i. Calculer le rang de f .
 - ii. En déduire la dimension du noyau de f .
 - iii. Montrer que 0 est une valeur propre de f , et que la famille $((-1, 2, 0))$ est une base du sous-espace propre associé.
- b.
 - i. Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$.
 - ii. Montrer que 8 est valeur propre de f , et donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 8. Les coefficients du ou des vecteurs propres formant cette base seront des entiers.
- c.
 - i. Calculer $f(1, -1, 0)$.
 - ii. En déduire une troisième valeur propre de f , et donner une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre.
- d. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
- e. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer l'inverse de P .
- f. Donner une relation entre P^{-1} , A , P et D .

2. Résolution d'une première équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices N , de taille 3×3 , à coefficients réels, telles que :

$$(E) \quad N^3 = D.$$

- a. Question Préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - i. l'équation $x^3 = 8$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$;
 - ii. l'équation $x^3 = -1$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$.
- b. Soit N une matrice qui vérifie (E). Montrer qu'alors $DN = ND$.
- c. En déduire que la matrice N est diagonale. On pourra commencer par écrire $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et en déduire un système d'équations portant sur les coefficients de la matrice N .
- d. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice N qui vérifie (E), et donner cette matrice.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices M , de taille 3×3 , telles que :

$$(E') \quad M^3 = A.$$

- a. Soit M une matrice de taille 3×3 . Montrer que :

$$M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D.$$

- b. En déduire la ou les solutions de (E') .
c. Existe-t-il des matrices M à coefficients réels telles que $M^2 = A$?

Analyse (2022)

On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$.

1. a. Calculer la dérivée de la fonction $f : t \mapsto \ln(t+1)$ sur $[0; 1]$.
b. En déduire la valeur de I_0 .
2. a. En effectuant le changement de variable $u = t + 1$, prouver que l'on a :

$$I_1 = 1 - \int_1^2 \frac{1}{u} du.$$

- b. En déduire la valeur de I_1 .
3. a. Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, donner le signe de $\frac{t^n}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b. En déduire que la suite (I_n) est positive.
 4. a. Si t est un réel fixé compris entre 0 et 1, comparer $\frac{t^n}{t+1}$ et $\frac{t^{n+1}}{t+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b. Comparer I_n et I_{n+1} et donner la monotonicité de la suite (I_n) .
 5. Montrer que la suite (I_n) admet une limite finie, et que cette limite est positive.
 6. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
 7. En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n) .
 8. Le but de cette question est de donner un équivalent simple de (I_n) .
a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la double inégalité,

$$2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n.$$

- b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n}{n+1} \leq 2nI_n \leq 1.$$

- c. Donner la limite de la suite (nI_n) lorsque n tend vers l'infini.
d. Conclure.
9. On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $K_n = \int_0^1 t^n \ln(t+1) dt$.
a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$I_n = \ln(2) - nK_{n-1}$$

(On pourra réaliser une intégration par parties.)

- b. Prouver que la suite (K_n) tend vers 0.

- c. Montrer que $K_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.

Probabilités (2022)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la notion de fonction génératrice d'une variable aléatoire dans deux cas particuliers. Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $E[X]$ l'espérance de X .

A. Étude d'une première variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On définit $V = 2^U$. La variable aléatoire V ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 (lorsque $U = 0$) et 2 (lorsque $U = 1$).

1. Montrer que $P(V = 2) = p$.
2. Déterminer la loi de V en fonction de p . On donnera le résultat sous la forme d'un tableau.
3. On définit $g_U = E[2^U]$; on a donc simplement $g_U = E[V]$. Calculer la valeur de g_U en fonction de p .
4. Montrer que si $g_U = 2$, alors la variable aléatoire U suit une loi certaine.

B. Étude d'un autre cas

On se donne à présent une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On note $p = P(X = 0)$ et $q = P(X = 1)$. On pose $g_X = E[2^X]$ et $h_X = E[(-1)^X]$.

1. Exprimer $P(X = 2)$ en fonction de p et q .
On va à présent exprimer h_X et g_X en fonction de p et de q .
2. On définit $Z = (-1)^X$. Donner les deux valeurs que peut prendre la variable aléatoire Z .
3. Calculer $P(Z = 1)$ en fonction de q .
4. Montrer que $h_X = 1 - 2q$.
5. Calculer aussi g_X en fonction de p et q grâce au théorème de transfert.
6. Cas particulier : lorsque X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, calculer g_X et h_X .

C. Caractérisation de la loi

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1 - 2y = \frac{1}{3} \\ 4 - 3x - 2y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues réelles. Résoudre ce système.

2. On se donne à nouveau une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On suppose que $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$. Montrer qu'alors X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.
3. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi uniforme si, et seulement si, $E[2^X] = \frac{7}{3}$ et $E[(-1)^X] = \frac{1}{3}$.

Probabilités (2019)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a \sin^2(x) & \text{si } x \in [0; \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Valeur de a

- a. On pose $I = \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx$ et $J = \int_0^\pi \cos^2(x) \, dx$. Calculer $I + J$.
- b. Donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^\pi \cos(2x) \, dx$.
- c. Montrer que l'on a $J - I = 0$.
- d. En déduire la valeur de I .
- e. Déterminer la valeur du nombre réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité. On conserve cette valeur par la suite.

On considère désormais X , une variable aléatoire de densité f .

2. Espérance de X

- a. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$.
- b. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\int_0^\pi x \cos(2x) \, dx$.
- c. Trouver des coefficients réels α et β tels que, pour tout réel x , on a :

$$\sin^2(x) = \alpha + \beta \cos(2x).$$

- d. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance que l'on calculera.

3. Fonction de répartition

- a. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$. On pourra utiliser la question **2.c.**.
- b. Si x est un réel n'appartenant pas à l'intervalle $[0; \pi]$, calculer la probabilité $\mathbf{P}(X \leq x)$.
- c. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
- d. Calculer la probabilité de l'évènement $(|X| \leq \frac{\pi}{2})$.

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2017)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.
 - a. Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f .
 - b. Montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ forme une base du noyau de f .
 - c. Soit $v = (0, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2.
 - a. Vérifier que $f(v) = u$ et $f(w) = v$.
 - b. Donner la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base (u, v, w) .
 - c. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w) . Donner l'expression de P .
 - d. Exprimer A en fonction de N , P et P^{-1} .
3.
 - a. Calculer N^2 et N^3 .
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, N^n est la matrice nulle.
 - c. Dédire des questions précédentes, pour tout entier naturel n , la valeur de A^n .

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2016)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire deux jetons de l'urne au hasard.

On étudie dans la première partie de l'exercice le cas d'un tirage avec remise et, dans la seconde partie, le cas d'un tirage sans remise lorsque l'urne contient quatre jetons. Les deux parties sont indépendantes.

1. Cas d'un tirage avec remise

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro de premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du second jeton tiré. On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand de ces deux numéros.

- a. Montrer que la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur un ensemble à préciser. Donner, de même, la loi de X_2 .
- b. Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
- c. Soit i un entier naturel compris entre 1 et n .
 - i. On note A_i l'évènement $(X_1 \leq i)$ et B_i l'évènement $(X_2 \leq i)$. Décrire par une phrase en français ces évènements. Montrer que $P(A_i) = \frac{i}{n}$. Calculer de même $P(B_i)$.
 - ii. Décrire, en français, l'évènement $A_i \cap B_i$. Calculer la probabilité de cet évènement.
 - iii. On appelle F_M la fonction de répartition de la variable aléatoire M . Rappeler la définition de F_M . Donner ensuite la valeur de $F_M(i)$.
 - iv. Dédire de ce qui précède que, pour tout entier i compris entre 1 et n , on a

$$P(M = i) = \frac{2i - 1}{n^2}.$$

2. Cas d'un tirage sans remise, avec $n = 4$.

On suppose dans cette partie que l'urne contient $n = 4$ jetons. On suppose aussi que le tirage est sans remise : le premier jeton n'est donc pas remis dans l'urne avant le tirage du second jeton.

On appelle Y_1 le numéro du premier jeton tiré et Y_2 le numéro du second jeton tiré. Il est clair que Y_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ce que l'on pourra utiliser dans la suite.

- a. Soit j un entier naturel compris entre 1 et 4. Justifier que :

$$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } j \in \{2, 3, 4\} \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

- b. En déduire que $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{4}$. On pourra employer la formule de probabilités totales.

On peut montrer de la même façon que, pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$, $P(Y_2 = i) = \frac{1}{4}$.

On admet ce résultat et on pourra l'utiliser dans la suite.

- c. Donner alors la loi de Y_2 ainsi que l'espérance de cette variable aléatoire.
- d. Donner, sans justification, la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) . On pourra représenter cette loi sous forme d'un tableau à double entrée.
- e. Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2) .

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2010)

Pour tout entier naturel n , on considère

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) \, dx.$$

1. **a.** Montrer que la fonction $F : x \mapsto (x+1)[\ln(x+1) - 1]$ est une primitive sur $] -1 ; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$.
b. Dédire de la question précédente la valeur de I_0 .
2. **a.** Justifier que

$$\forall x \in] -1 ; +\infty[, \quad \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

- b.** Calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$.
- c.** En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2} [\ln(2) - J].$$

- d.** En déduire la valeur de I_1 .
3. **a.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
d. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

- e.** Dédire des questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

Fin du sujet

Mathématiques : Méthodes de calcul et raisonnement

Durée : 2 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice d'analyse (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2018)

Pour tout réel x , on pose $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ et $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)e^x$.
On admet que les fonctions P et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour tout réel x , $P'(x)$ puis $P'(x) + P(x)$.
2. Calculer, pour tout réel x , $f'(x)$.
3. Soit x un nombre réel. Factoriser $x^3 - x$.
4. Tracer le tableau de variations de f . On fera apparaître les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Justifier que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) < 0$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[-2e; +\infty[$.
7. Donner le signe de f sur $] -\infty; -1]$.
8. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
9. Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 3x^2 + 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que celle-ci est comprise entre 1 et 2.

Exercice d'algèbre (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2021)

Dans cet exercice, les matrices sont toutes de taille 3×3 et à coefficients réels. En cas de besoin, on pourra noter I_3 la matrice identité, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Vérifier que le vecteur $(1; 0; 0)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.
2. Démontrer que 4 est valeur propre de u et donner un vecteur propre associé.
3. *Sans justifier*, donner un réel a tel que le vecteur $(a; 1; 0)$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 3. (*On demande seulement la valeur correcte de a*).

Les trois questions précédentes permettent de montrer que A est diagonalisable : on l'admet ici.

4. *Sans justifier*, donner une matrice D diagonale et une matrice P_0 inversible vérifiant les deux conditions suivantes :

– $D = P_0^{-1}AP_0$

– la matrice P_0 est de la forme $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{pmatrix}$ où a est le réel trouvé plus haut, et

x_0, y_0 et z_0 sont trois réels que l'on précisera.

(On demande seulement les expressions correctes de D et de P_0 sans justifications.)

On rappelle que u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

Soit F l'ensemble suivant :

$$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x, y, z) = 4(x, y, z)\}.$$

5. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner une base de F .

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. On définit la matrice $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, où a est le réel trouvé à la question 3.

7. Calculer le produit suivant : $M_{x,y,z} \times D$. Calculer aussi le produit : $A \times M_{x,y,z}$
8. Soit $(x; y; z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le vecteur $(x; y; z)$ appartient à F si, et seulement si, on a la relation $M_{x,y,z} \times D = A \times M_{x,y,z}$.
9. Soit Q une matrice inversible telle que $D = Q^{-1}AQ$. A-t-on obligatoirement $Q = P_0$?

Exercice de probabilités (d'après le sujet du concours Agro/Véto – voie A-TB – 2003)

Dans tout l'exercice, p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et $q = 1 - p$.

1.
 - a. Justifier que la série $\sum pq^n$ est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} pq^n$.
 - b. Justifier la convergence des séries $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ et rappeler (sans démonstration) les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et de $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$.
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = pq^n.$$

- a. Vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$.
 - b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
 - c. Montrer que la variable aléatoire $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
 - d. En déduire que X admet une variance et que $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$.
3. Pour tous réels x et y , on définit la matrice

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x+1 & y \\ y & x+1 \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer que, pour tous réels x et y , la matrice $M(x, y)$ n'est pas inversible si et seulement si
- $$(x+1+y)(x+1-y) = 0.$$
- b. En déduire que, pour tous entiers naturels n et m , $M(n, m)$ n'est pas inversible si et seulement si $n+1-m = 0$.
 4. On considère une variable aléatoire Y définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que la variable aléatoire X de la question 2.. On suppose de plus que Y a la même loi que X et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = M(X(\omega), Y(\omega)).$$

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'évènement A : « Z n'est pas inversible ».

- a. Montrer que $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = n+1))$.
 - b. En déduire que $\mathbf{P}(A) = \frac{pq}{1+q}$.

Fin du sujet