⧫ Révisions – février 2024

Algèbre (2016)

Dans tout cet exercice, les matrices considérées sont à coefficients réels. On note, de plus, dans tout l'exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A.

1. Diagonalisation de A

a. i. Calculer le rang de f.

ii. En déduire la dimension du noyau de f.

iii. Montrer que 0 est une valeur propre de f, et que la famille $((-1, 2, 0))$ est une base du sous-espace propre associé.

b. i. Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$.

ii. Montrer que 8 est valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 8. Les coefficients du ou des vecteurs propres formant cette base seront des entiers.

c. i. Calculer $f(1, -1, 0)$.

ii. En déduire une troisième valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

d. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

e. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer l'inverse de P.

f. Donner une relation entre P^{-1}, A, P et D.

2. Résolution d'une première équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrice N, de taille 3×3, à coefficients réels, telles que :

$$(E) \ N^3 = D.$$

a. Question Préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

i. l'équation $x^3 = 8$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$;

ii. l'équation $x^3 = -1$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$.

b. Soit N une matrice qui vérifie (E). Montrer qu'alors $DN = ND$.

c. En déduire que la matrice N est diagonale. On pourra commencer par écrire $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et en déduire un système d'équation portant sur les coefficients de la matrice N.

d. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice N qui vérifie (E), et donner cette matrice.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices M, de taille 3×3, telles que :

$$(E') \ M^3 = A.$$

a. Soit M une matrice de taille 3×3. Montrer que :

$$M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D.$$

b. En déduire la ou les solutions de (E').

c. Existe-t-il des matrices M à coefficients réels telles que $M^2 = A$?

Solution.

1. a. i. Considérons le système

$$(S) \begin{cases} -2x - y + z = 0 & L_1 \\ 2x + y + 7z = 0 & L_2 \\ 8z = 0 & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 & L_1 \\ 8z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 8z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases}$$

Le dernier système possède 2 pivots donc est de rang 2. On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

ii. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f)$ donc $\boxed{\dim(\ker(f)) = 1}$.

iii. On sait que $\ker(f)$ est l'espace propre associé à 0 donc, comme $\dim(\ker(f)) > 0$, $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } f}$. De plus,

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -2+2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f((-1, 2, 0)) = (0, 0, 0)$ i.e. $(-1, 2, 0) \in \ker(f)$. Comme $\dim(\ker(f)) = 1$ et $(-1, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$, on conclut que $\boxed{((-1, 2, 0)) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

b. i. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$f(x, y, z) = 8(x, y, z) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ 8z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 8x \\ 2x + y + 7z = 8y \\ 8z = 8z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -10x - y + z = 0 \\ 2x - 7y + 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 10x + y \\ 2x - 7y + 7(10x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 10x + y \\ 72x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$ est $\boxed{\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}}$.

ii. D'après la question précédente, $(0, 1, 1)$ est un vecteur non nul tel que $f(0, 1, 1) = 8(0, 1, 1)$ donc $\boxed{8 \text{ est valeur propre de } f}$. De plus $E_8(f) = \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$ donc $\boxed{((0, 1, 1) \text{ est une base de } E_8(f)}$.

c. i. Comme

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+1\\2-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{f(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)}$.

ii. Ainsi, $f(1, -1, 0) = -(1, -1, 0)$ donc, comme $(1, -1, 0) \neq (0, 0, 0)$, on conclut que $\boxed{-1 \text{ est une valeur propre de } f}$.

De plus, on sait que la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à 3 donc $\dim(E_{-1}(f)) \leqslant 3 - \dim(E_0(f)) - \dim(E_8(f)) = 1$ et, comme $\dim(E_{-1}(f)) \geqslant 1$, on conclut que $\dim(E_{-1}(f)) = 1$. On en déduit que $E_{-1}((f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0))$ donc $\boxed{(1, -1, 0) \text{ est une base de } E_{-1}(f)}$.

d. L'endomorphisme f admet 3 valeurs propres distinctes. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on conclut, par théorème, que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

e. La famille $(-1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 0))$ est obtenue en concaténant des bases de $E_{-1}(f)$, $E_8(f)$ et $E_0(f)$ (car $(-1, 1, 0) = -(1, -1, 0)$ engendre également $E_{-1}(f)$) donc, par théorème, elle est libre. Comme c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Dès lors, sa matrice dans la base canonique est inversible i.e. $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

Considérons le système

$$(S)\begin{cases}-x - z = a & L_1\\ x + y + 2z = b & L_2\\ y = c & L_3\end{cases}$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases}-x - z = a & L_1\\ y = c & L_2 \leftrightarrow L_3\\ x + y + 2z = b & L_3 \leftrightarrow L_2\end{cases} \iff \begin{cases}-x - z = a & L_1\\ y = c & L_2\\ y + z = a + b & L_3 \leftarrow L_3 + L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-x - z = a & L_1\\ y = c & L_2\\ z = a + b - c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{cases} \iff \begin{cases}x = -2a - b + c\\ y = c\\ z = a + b - c\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}$.

f. Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base formée par des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -1, 8 et 0, on a, par propriété, $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

2. Résolution d'une première équation matricielle

a. i. D'une part, $2^3 = 8$ et, d'autre part, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution réelle de l'équation } x^3 = 8 \text{ est } x = 2}$.

ii. De même, $(-1)^3 = -1$ donc $\boxed{\text{l'unique solution réelle de } x^3 = -1 \text{ est } x = -1}$.

b. Comme N vérifie (E), $N^3 = D$ donc $DN = N^3N = N^4 = NN^3 = ND$ donc $\boxed{DN = ND}$.

c. Écrivons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors,

$$DN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 8d & 8e & 8f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 8b & 0 \\ -d & 8e & 0 \\ -g & 8h & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme $ND = DN$,

$$\begin{cases} -b = 8b \\ -c = 0 \\ 8d = -d \\ 8f = 0 \\ -g = 0 \\ 8h = 0 \end{cases}$$

donc $b = c = d = f = g = h = 0$. On en déduit que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{N \text{ est diagonale}}$.

d. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, on a $N^3 = \begin{pmatrix} d_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^3 \end{pmatrix}$ donc, comme $N^3 = D$, $d_1^3 = -1$, $d_2^3 = 8$ et $d_3^3 = 0$. On déduit alors de la question **a.** que $d_1 = -1$, $d_2 = 2$ et $d_3 = 0$. Ainsi, la seule matrice possible est $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si N est cette matrice alors on a bien $N^3 = D$ donc $\boxed{N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est l'unique matrice qui vérifie } (E)}$.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

a. Comme $A = PDP^{-1}$,

$$M^3 = A \iff M^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^3P = D.$$

Or, par associativité du produit matricielle,

$$\begin{aligned}(P^{-1}MP)^3 &= (P^{-1}MP)(P^{-1}MP)(P^{-1}MP)\\ &= P^{-1}M(PP^{-1})M(PP^{-1})MP\\ &= P^{-1}MI_3MI_3MP = P^{-1}M^3P\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D}.$$

b. On déduit de la question précédente et du résultat de la question **2.** que

$$M^3 = A \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \iff M = P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned}P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E') \text{ est } M = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$.

c. En raisonnant comme précédemment, si $M^2 = A$ alors $(P^{-1}MP)^2 = D$. Or, en raisonnant comme dans la question 2., si $N^2 = D$ alors N est diagonale et ses éléments diagonaux vérifient $d_1^2 = -1$, $d_2^2 = 8$ et $d_3^2 = 0$. Or, il n'existe pas de réel d_1 tel que $d_1^2 = -1$ donc l'équation $N^2 = D$ n'a pas de solution. On conclut qu'$\boxed{\text{il n'existe pas de matrices à coefficients réels } M \text{ telles que } M^2 = A}$.

Algèbre (2015)

On définit, pour tout nombre réel a, la matrice :

$$M_a = \begin{pmatrix}a-1 & -1\\ 2 & a+2\end{pmatrix}.$$

1. a. On considère l'équation :

$$(x-1)(x+2)+2 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Résoudre cette équation.

b. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?

c. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de la matrice M_a.

2. Donner une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice M_a.

3. Donner une matrice P inversible, de taille 2×2, telle que la matrice $P^{-1}M_aP$ est diagonale.

4. Soit a et b deux nombres réels. Montrer que $M_aM_b = M_bM_a$.

5. Soit n un entier naturel non nul. On considère la matrice A_n suivante :

$$A_n = M_1M_2M_3 \cdots M_n$$

obtenue en effectuant le produit des n matrices M_1, M_2, ..., M_n. Donner, en fonction de n, quatre nombres réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

6. On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $u_1 = -2$, $v_1 = 4$ et qui vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = (n-1)u_n - v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + (n+2)v_n.$$

Donner, en fonction de n, une expression du terme général u_n de la suite.

Solution.

1. a. Pour tout réel x,

$$(x-1)(x+2)+2 = 0 \iff x^2+2x-x-2+2 = 0 \iff x(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (x-1)(x+2)+2=0 \text{ est } \{0\,;-1\}}$.

b. Pour tout réel x, $\det(M_a) = (a-1)(a+2)+2$ donc, d'après la question précédente, $\det(M_a) = 0$ si et seulement si $a \in \{0\,;-1\}$.

On en déduit que $\boxed{\text{la matrice } M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\,;-1\}}$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un réel λ est valeur propre de M_a si et seulement si $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Or,

$$M_a - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-\lambda)-1 & -1 \\ 2 & (a-\lambda)+2 \end{pmatrix} = M_{a-\lambda}.$$

On déduit alors de la question précédente que λ est valeur propre de M_a si et seulement si $a-\lambda = 0$ ou $a-\lambda = -1$ i.e. $\lambda = a$ ou $\lambda = a+1$.

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } M_a \text{ sont } a \text{ et } a+1}$.

2. Déterminons une base de $E_a(M_a)$. Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M_a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (a-1)x - y = ax \\ 2x + (a+2)y = ay \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

Ainsi, on a $E_a(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Dès lors, on conclut que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_a(M_a)}$.

Déterminons une base de $E_{a+1}(M_a)$. Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a+1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (a-1)x - y = (a+1)x \\ 2x + (a+2)y = (a+1)y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff y = -2x$$

Ainsi, on a $E_{a+1}(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$. Dès lors, on conclut que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{a+1}(M_a)}$.

3. On en déduit que $\boxed{\text{si } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1} M_a P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}}$.

4. D'une part,

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-1 & -1 \\ 2 & b+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)(b-1)-2 & -(a-1)-(b+2) \\ 2(b-1)+2(a+2) & -2+(a+2)(b+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab-a-b-1 & -a-b-1 \\ 2a+2b+2 & ab+2a+2b+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} b-1 & -1 \\ 2 & b+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-1)(a-1)-2 & -(b-1)-(a+2) \\ 2(a-1)+2(b+2) & -2+(b+2)(a+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab-a-b-1 & -a-b-1 \\ 2a+2b+2 & ab+2a+2b+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{M_a M_b = M_b M_a}$

<u>Autre méthode.</u> Comme la matrice P ne dépend pas de a, on a $M_a = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $M_b = P \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix} P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} M_a M_b &= P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & (a+1)(b+1) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} P^{-1} = M_b M_a \end{aligned}$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k = P \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} A_n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \cdots P \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n & 0 \\ 0 & 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n+1) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} n! & 0 \\ 0 & (n+1)! \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Or, $\det(P) = -2 - (-1) = -1$ donc $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et ainsi

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n! & 0 \\ 0 & (n+1)! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n! & (n+1)! \\ -n! & -2(n+1)! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n! - (n+1)! & n! - (n+1)! \\ -2n! + 2(n+1)! & -n! + 2(n+1)! \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n! - (n+1)n! & n! - (n+1)n! \\ -2n! + 2(n+1)n! & -n! + 2(n+1)n! \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} (1-n)n! & -nn! \\ 2nn! & (2n+1)n! \end{pmatrix}}$$

6. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} (n-1)u_n - v_n \\ 2u_n + (n+2)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n X_n$$

Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $P(n)$: « $X_n = A_{n-1}X_1$ ».
Initialisation. Comme $A_1 = M_1$, d'après ce qui précède, $X_2 = M_1X_1 = A_1X_1$ donc $P(2)$ est vraie.
Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors,

$$X_{n+1} = M_nX_n = M_n(A_{n-1}X_1) = (M_nA_{n-1})X_1.$$

Or, comme M_a et M_b commutent pour touts réels a et b,

$$M_nA_{n-1} = M_n(M_1M_2\cdots M_{n-1}) = M_1M_2\cdots M_{n-1}M_n = A_n$$

donc $X_{n+1} = A_nX_1$ et ainsi $P(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $X_n = A_{n-1}X_1$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$X_n = \begin{pmatrix} (2-n)(n-1)! & -(n-1)(n-1)! \\ 2(n-1)(n-1)! & (2n-1)(n-1)! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2(2-n) - 4(n-1)](n-1)! \\ [-4(n-1) + 4(2n-1)](n-1)! \end{pmatrix}$$

soit $X_n = \begin{pmatrix} -2n(n-1)! \\ 4n(n-1)! \end{pmatrix}$.
On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = -2n(n-1)!$. De plus, comme $0! = 1$, cette égalité reste vraie pour $n = 1$ donc on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = -2n(n-1)!}$$

Analyse (2012)

1. Ensemble de définition

x désigne un réel strictement positif.

a. Justifier la continuité sur le segment $[0\,;1]$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{x+t}$.

b. En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Dans la suite du problème, f désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[\,, \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Monotonie de la fonction f

a. x et y désignent deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$.

i. Montrer que :

$$\forall t \in [0\,;1]\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^t}{y+t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}.$$

ii. En déduire que $f(y) \leqslant f(x)$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[\,$?

3. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. Commençons par étudier la limite de f en $+\infty$.

i. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

ii. En déduire la limite de f en $+\infty$.

b. Étudions maintenant la limite de f en 0.

i. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

ii. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

iii. En déduire la limite de f en 0.

4. Représentation graphique

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

a. Interpréter graphiquement les résultats des questions **3.a.**ii. et **3.b.**iii.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

5. Équivalent en 0

a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En remarquant que, pour tout réel u, $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u - 1 + 1$, montrer que :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\,\mathrm{d}u\right).$$

c. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^u - 1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}.$$

Démontrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du problème, Φ désigne une primitive sur $\mathbb{R}$ de φ.

6. Pour tout réel strictement positif x, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u}\, du$ en fonction de Φ et de x.

En déduire que $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u - 1}{u}\, du$ admet une limite finie quand x tend vers 0, limite que l'on ne cherchera pas à évaluer.

7. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Solution

1. Ensemble de définition

a. Les fonctions $t \longmapsto e^t$ et $t \longmapsto x + t$ sont continues sur $[0\,;1]$. De plus, comme $x > 0$, pour tout $t \in [0\,;1]$, $x + t > 0$ donc, par quotient, $\boxed{t \longmapsto \dfrac{e^t}{x+t} \text{ est continue sur } [0\,;1]}$.

b. L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est bien définie donc on déduit de la question **a.** que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt \text{ existe}}$.

2. Monotonie de la fonction f

a. i. Soit $t \in [0\,;1]$. Comme $0 < x \leqslant y$, $0 \leqslant t < x + t \leqslant y + t$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{y+t} \leqslant \dfrac{1}{x+t}$. Dès lors, en multipliant par $e^t > 0$, $\dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0\,;1],\ \dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}}$.

b. Par croissance de l'intégrale (car $0 < 1$), on déduit de la question précédente que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{y+t}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt$ i.e. $\boxed{f(y) \leqslant f(x)}$.

c. On a montré que, pour tout $(x, y) \in]0\,;+\infty[^2$, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \geqslant f(y)$ donc la fonction $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0\,;+\infty[}$.

3. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. i. Soit un réel $x > 0$. Alors, pour tout $t \in [0\,;1]$, $x + t \geqslant x > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}$. En multipliant par $e^t > 0$, on en déduit que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{e^t}{x+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x}\, dt$ et, par linéarité, $\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 e^t\, dt}$.

ii. Comme $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est une constante (que l'on peut calculer mais ce n'est pas utile) et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0$. On déduit alors du théorème d'encadrement que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

b. i. Soit un réel $x > 0$. Pour tout réel $t \in [0\,;1]$, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^0$ i.e. $\mathrm{e}^t \geqslant 1$. Pour tout réel $t \in [0\,;1]$, $x+t > 0$ donc, en divisant l'inégalité précédente par $x+t$, il vient $\dfrac{\mathrm{e}^t}{x+t} \geqslant \dfrac{1}{x+t}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t} \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$ i.e. $\boxed{\displaystyle f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t}$.

ii. Pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0\,;1]$, $x+t > 0$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x)$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$.

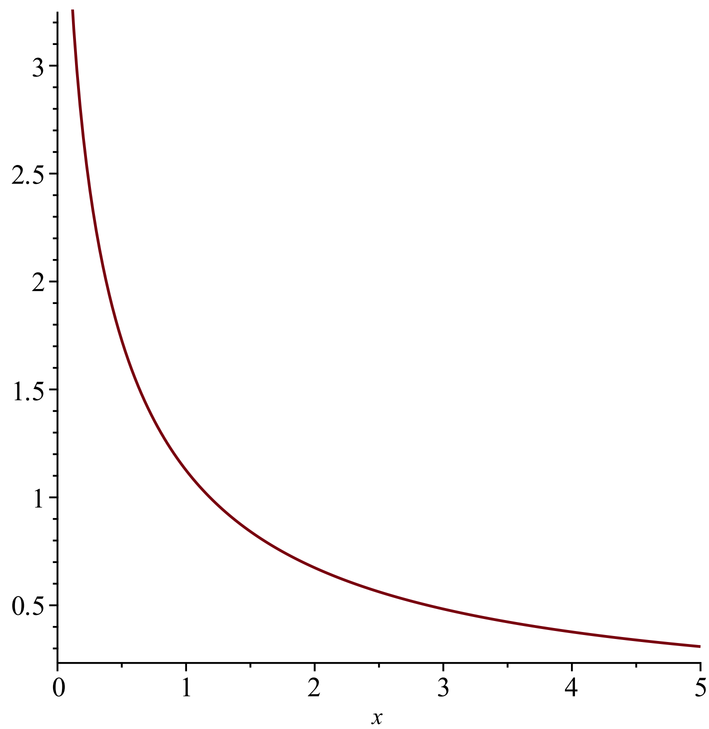
iii. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} x+1 = 1$, par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$. Or, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty$.

Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.

4. Représentation graphique

a. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b. On obtient une courbe ayant l'allure suivante :



5. Équivalent en 0

a. Soit $x>0$. On va effectuer le changement de variable $u=x+t$ i.e. $t=u-x$. La fonction $\varphi : u \longmapsto u-x$ est affine donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en posant $t=u-x$, $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$, lorsque $t=0$, $u=x$ et lorsque $t=1$, $u=x+1$ de sorte que

$$f(x)=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^{u-x}}{u}\,\mathrm{d}u=\int_x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$$

et, par linéarité de l'intégrale, on conclut que $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u}$.

b. Soit un réel $x>0$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u&=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1+1}{u}\,\mathrm{d}u=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u+\int_x^{x+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\&=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u+[\ln(u)]_x^{x+1}=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u+\ln(x+1)-\ln(x)\\&=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\end{aligned}$$

On conclut alors, grâce à la question précédente que,

$$\boxed{\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\qquad f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u\right)}.$$

c. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. De plus, au voisinage de 0, $\mathrm{e}^u-1\sim u$ donc $\varphi(u)\sim\frac{u}{u}\sim 1$. Ainsi, $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=1$ i.e. $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=\varphi(0)$ donc φ est continue en 0.

On conclut que $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

6. Par le théorème fondamental de l'analyse, $\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u=[\Phi(u)]_x^{x+1}$ c'est-à-dire $\boxed{\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u=\Phi(x+1)-\Phi(x)}$.

La fonction Φ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x)=\Phi(0)$ et, par composition, $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x+1)=\Phi(1)$ donc, par différence de limites, on conclut que $\boxed{\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } 0}$ (cette limite étant égale à $\Phi(1)-\Phi(0)$).

7. Comme $1+\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$ et $\ln(X)\xrightarrow[X\to+\infty]{}+\infty$, par composition, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. On en déduit, par somme et quotient, que

$$\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1+\frac{\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\,\mathrm{d}u}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\xrightarrow[x\to 0^+]{}1$$

donc

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

En remarquant que, pour tout $x > 0$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$, on a en fait $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$ et donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\mathrm{e}^{-x}\ln(x)}.$$

Analyse (2008)

1. **Ensemble de définition**

   a. Soit x appartenant à $]1\,;+\infty[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.

   b. Soit x appartenant à $]0\,;1[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.

   Nous pouvons ainsi définir une fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

2. **Étude de la dérivabilité**

   a. Justifier l'existence d'une primitive H de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]1\,;+\infty[$, puis exprimer pour tout réel x appartenant à $]1\,;+\infty[$, $f(x)$ en fonction de $H(x^2)$ et $H(x)$.
   En déduire que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer f'.
   Quel est le sens de variations de f sur $]1\,;+\infty[$?

   b. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et calculer f'.
   Quel est le sens de variations de f sur $]0\,;1[$?

3. **Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition**

   a. Étude en 0 par valeurs supérieures
   Soit x appartenant à $]0\,;1[$. Montrer que, pour tout t appartenant à $[x^2\,;x]$,

   $$\frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(x^2)}$$

   et en déduire que

   $$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.$$

   Montrer alors que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en 0 de f ainsi prolongée.
   La fonction f ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.
   À l'aide de l'encadrement précédent, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ a pour limite 0 en 0.
   Que peut-on en déduire sur la fonction f ? Interpréter géométriquement ce résultat.

   b. Étude en l'infini
   En s'inspirant de la méthode décrite en **a.**, pour tout réel x appartenant à $]1\,;+\infty[$, encadrer $f(x)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit x appartenant à $]1\,;+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(2)$.

En remarquant que $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} t \times \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$, montrer que $x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de f en 1 par valeurs supérieures.

d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Par un travail similaire à celui de la question précédente, montrer que $f(x)$ a pour limite $\ln(2)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

e. Prolongement par continuité de f en 1

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.
La fonction ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.

4. Représentation graphique de f

a. Résumer les résultats précédents en dressant le tableau de variations de f (prolongée par continuité en 0 et en 1).

b. Tracer l'allure de la courbe de f. On pourra utiliser le fait que $\ln(2) \approx 0{,}69$.

Solution

1. Ensemble de définition

a. La fonction ln est continue est strictement positive sur $]1\,;+\infty[$ donc sur $[x\,;x^2]$ (car $x > 1$). Dès lors, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue et positive sur $[x\,;x^2]$. On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \text{ existe et est positive.}}$

b. La fonction ln est continue est strictement négative sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $[x^2\,;x]$ (car $x \in\,]0\,;1[$). Dès lors, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue et négative sur $[x^2\,;x]$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ existe et est négative et donc, étant donné que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$, on conclut que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \text{ existe et est positive.}}$

2. Étude de la dérivabilité

a. Comme on l'a dit précédemment, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]1\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle. En notant H l'une de ces primitives, par le théorème fondamental de l'analyse, on a, $\boxed{\text{pour tout } x > 1,\ f(x) = H(x^2) - H(x)}$.
Comme H est dérivable sur $]1\,;+\infty[$, par composition et différence, f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = 2x \times \frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}}$.

Pour tout $x > 1$, $x - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1\,;+\infty[}$.

b. Par le même raisonnement, $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ admet des primitives sur $]0\,;1[$ et, en notant H l'une de ces primitives, pour tout $x \in]0\,;1[$, $f(x) = H(x^2) - H(x)$. Dès lors, de la même façon, f est dérivable sur $]0\,;1[$ et, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0\,;1[,\ f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}}$.

Pour tout $x \in]0\,;1[$, $x - 1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;1[}$.

3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. Étude en 0 par valeurs supérieures

Soit $t \in [x^2\,;x]$. Alors, $x^2 \leqslant t \leqslant x < 1$ donc, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(x^2) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x) < 0$. Dès lors, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$, $\boxed{\dfrac{1}{\ln(x)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(x^2)}}$. Par croissance de l'intégrale, comme $x^2 < x$, on en déduit que

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t$$

donc, en multipliant par -1,

$$\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d} \geqslant \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\dfrac{1}{\ln(x)}$ ne dépend par de t donc, par linéarité,

$$\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(x)}\int_{x}^{x^2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(x)}\,[t]_x^{x^2} = \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

et

$$\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{x(x-1)}{2\ln(x)}.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = +\infty$, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0}$.

Pour tout $x \in]0\,;1[$, on déduit de l'encadrement précédent, en divisant par $x > 0$ que

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Par le même raisonnement, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$.

Autrement, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$. On en déduit que la courbe de f admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

b. Étude en l'infini

Soit un réel $x > 1$ et soit $t \in [x\,;x^2]$. Alors, $1 < x \leqslant t \leqslant x^2$ donc, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $0 < \ln(x) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x^2)$. Dès lors, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\boxed{\dfrac{1}{\ln(x^2)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(x)}}$. Par croissance de l'intégrale, comme $x < x^2$, on en déduit que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}t$$

et donc, comme précédemment,

$$\boxed{\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}}.$$

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \sim \dfrac{x^2}{2\ln(x)}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} = +\infty$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit $x > 1$. En écrivant $\dfrac{1}{t\ln(t)} = \dfrac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$, on reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ donc

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} = \ln\left(\left|\ln(x^2)\right|\right) - \ln(|\ln(x)|).$$

Or, comme $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et $\ln(x^2) > 0$ donc

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t &= \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x))\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(2)}$.

Pour tout $t \in [x\,;x^2]$, $x \leqslant t \leqslant x^2$ donc, comme $\dfrac{1}{t\ln(t)} > 0$, $\dfrac{x}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{t}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln(t)}$ i.e. $\dfrac{x}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln(t)}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

i.e. par linéarité,

$$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

et, ainsi, on conclut que $\boxed{x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)}$.

Or, $\lim\limits_{x\to1^+} x\ln(2) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2\ln(2) = \ln(2)$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln(2)}$.

d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Soit $x \in]0\,;1[$. Alors, pour tout $t \in [x^2\,;x]$, $x^2 \leqslant t \leqslant x$ donc, comme $\dfrac{1}{t\ln(t)} < 0$, $\dfrac{x^2}{t\ln(t)} \geqslant \dfrac{t}{t\ln(t)} \geqslant \dfrac{x}{t\ln(t)}$ i.e. $\dfrac{x}{t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln(t)}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$x\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant f(x) \geqslant x^2\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, comme $\ln(x) < 0$ et $\ln(x^2) < 0$,

$$\begin{aligned}\int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \int_{x}^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t &= \ln\left(\left|\ln(x^2)\right|\right) - \ln(|\ln(x)|) == \ln(-2\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) \\ &= \ln(2) + \ln(-\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) = \ln(2)\end{aligned}$$

donc, finalement, $x\ln(2) \geqslant f(x) \geqslant x^2\ln(2)$ et, comme précédemment, on conclut par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)}$.

e. Prolongement par continuité de f en 1

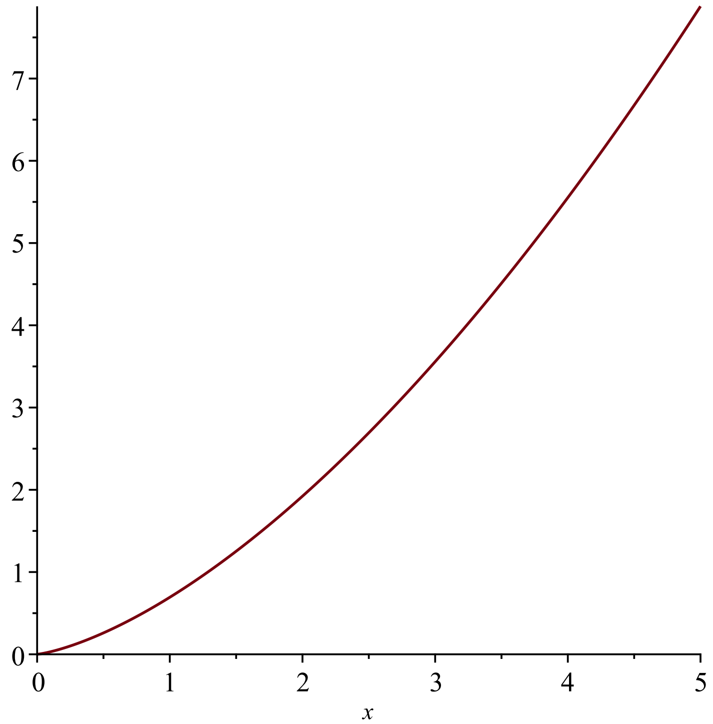
D'après les questions précédentes, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$, donc on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1) = \ln(2)}$.

4. Représentation graphique de f

a. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	
Variation de f	0	$\ln(2)$	$+\infty$

b. On aboutit à la courbe suivant :



Probabilités discrètes sur un univers fini (2013)

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\dfrac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D2 à 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

— nous commençons par jeter la pièce,

— si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D1, sinon nous choisissons le dé D2, choix définitif pour la suite de l'expérience,

— ensuite, nous jetons plusieurs fois le dé choisi et, pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

— D1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D1 »,

— D2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D2 »,

— pour tout entier naturel non nul n, R_n est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}(\mathrm{D1})$? $\mathbf{P}(\mathrm{D2})$?
Montrer que $\{\mathrm{D1}, \mathrm{D2}\}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_n)$? de $\mathbf{P}_{\mathrm{D2}}(\mathrm{R}_n)$?

3. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{R}_1)$.

4. Établir un lien entre les probabilités $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1)$, $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_2)$ et $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.
En déduire la valeur de $\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$.

6. Calculer $\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(D1)$ puis, de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, montrer que :

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1 ou sur le fait d'avoir un face rouge au lancer suivant ?

Solution

1. D'après l'énoncé, $\boxed{\mathbf{P}(D1) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbf{P}(D2) = \frac{2}{3}}$.

Comme $D2 = \overline{D1}$, $\boxed{\{D1, D2\} \text{ constitue un système complet d'évènements}}$.

2. D'après l'énoncé, $\boxed{\mathbf{P}_{D1}(R_n) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbf{P}_{D2}(R_n) = \frac{1}{3}}$.

3. Comme $\{D1, D2\}$ constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(R_1) = \frac{4}{9}}$.

4. Une fois que le dé a été choisi, les lancers de dés sont indépendants les uns des autres donc $\boxed{\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_{D1}(R_1) \times \mathbf{P}_{D1}(R_2)}$.

Ainsi, $\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

De la même façon, $\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_{D2}(R_1) \times \mathbf{P}_{D2}(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Comme $\{D1, D2\}$ constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{9}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{9}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fois que le dé a été choisi, les lancers de dés sont indépendants les uns des autres donc

$$\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbf{P}_{D1}(R_1) \times \mathbf{P}_{D1}(R_2) \times \cdots \mathbf{P}_{D1}(R_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et

$$\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbf{P}_{D2}(R_1) \times \mathbf{P}_{D2}(R_2) \times \cdots \mathbf{P}_{D2}(R_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $\{D1, D2\}$ constitue un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbf{P}(D1)\mathbf{P}_{D1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) + \mathbf{P}(D2)\mathbf{P}_{D2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3 \times 3^n} + \frac{2 \times 1^n}{3 \times 3^n}\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n) = \dfrac{2^n+2}{3^{n+1}}}$.

On en déduit que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_{n+1})}{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n)} = \frac{\frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}+2}{3\times 3^{n+1}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n+2}$$

soit finalement

$$\boxed{\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)}}.$$

6. Par définition,

$$\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2}(\mathrm{D1}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\mathrm{D1})}{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{D1})\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)}{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2}(\mathrm{D1}) = \dfrac{2}{3}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{D1}) &= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n\cap\mathrm{D1})}{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap R_n)} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{D1})\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n)}{\mathbf{P}(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3}\times\frac{2^n}{3^n}\times\frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n}{3^{n+1}}\times\frac{3^{n+1}}{2^n+2}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{D1}) = \dfrac{2^n}{2^n+2}}$.

7. La question revient à comparer $\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \dfrac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)}$ et $\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_n}(\mathrm{D1}) = \dfrac{2^n}{2^n+2}$ ce qui revient à comparer $\dfrac{2^{n+1}+2}{3}$ et 2^n. Or, pour $n \geqslant 1$, $2 \leqslant 2^n$ donc

$$2^{n+1}+2 \leqslant 2^{n+1}+2^n = 2^n(2+1) = 3\times 2^n$$

et ainsi $\dfrac{2^{n+1}+2}{3} \leqslant 2^n$.

Ainsi, $\boxed{\text{il vaut mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1}}$.

Probabilités discrètes sur un univers infini (2007)

a et b désignent des entiers naturels. Le taux de change est de 1,2 dollar = 1 euro.

Règle du Jeu : Marc et Bill jouent à pile ou face.

À chaque lancer, Marc lance 3 pièces de 1 euro et Bill 2 pièces de 1 dollar. Ils lancent simultanément les cinq pièces. On note X le nombre de « face » des pièces européennes et Y le nombre de « face » des pièces américaines.

À chaque lancer, Marc met en jeu une (nouvelle) mise de a euros et Bill une (nouvelle) mise de b dollars.

Si $X > Y$, Marc gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $X < Y$, Bill gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $X = Y$, ils lancent à nouveau les pièces (non sans avoir rajouté a euros pour Marc, b dollars pour Bill).

1. **Quelques calculs préliminaires**

   a. Donner le domaine de convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ainsi que sa somme.

   b. Pour $x \in]-1\,;1[$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

2. **Sur un lancer**

   a. Donner les lois de probabilités pour chacune des variables aléatoires X, Y et $Z = X - Y$.

   b. Calculer l'espérance des variables aléatoires X, Y et Z.

   c. Calculer les probabilités des évènements $[X > Y]$, $[X = Y]$ et $[X < Y]$.

3. **Sur une partie**

   a. Calculer la probabilité que $X = Y$ au n-ième lancer.
   Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie au $(n+1)$-ème lancer.

   b. Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie.

   c. Calculer l'espérance du gain de Marc en dollars (le gain étant le différence entre ce que l'on a misé et ce qu'on l'a encaissé). En déduire l'autre.
   On dit que le jeu est équitable si les deux espérances sont égales.

   d. Déterminer à quelle condition le jeu est équitable et donner l'espérance commune dans ce cas.

Solution

1. **Quelques calculs préliminaires**

   a. Par théorème, la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1\,;1[$ et, dans ce cas, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$.

   b. Par théorème, pour $x \in]-1\,;1[$, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$.

2. **Sur un lancer**

   a. $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$.
   Pour la loi de Z, on peut faire un tableau à double entrée donnant les valeurs de Z en fonction de celles de X et Y :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	-1	0	1	2
2	-2	-1	0	1

   Ainsi, $Z(\Omega) = \llbracket -2, 3 \rrbracket$. De plus,

   - $\mathbf{P}(Z = -2) = \mathbf{P}(X = 0, Y = 2)$ et, comme les lancers de Bill et Marc sont indépendants, $\mathbf{P}(Z = -2) = \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

- $\mathbf{P}(Z=-1)=\mathbf{P}((X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=2))$ et, cette union est disjointe donc $\mathbf{P}(Z=-1)=\mathbf{P}(X=0,Y=1)+\mathbf{P}(X=1,Y=2)$. Par indépendance, on en déduit que $\mathbf{P}(Z=-1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.
- En raisonnant de même, on obtient que $\mathbf{P}(Z=0)=\mathbf{P}(Z=1)=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$, que $\mathbf{P}(Z=2)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$ et que $\mathbf{P}(Z=3)=\dfrac{1}{12}$.
  On peut donc résumer la loi de Z par le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}(Z=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

b. On en déduit que $\mathbf{E}(X)=\dfrac{0+3}{2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X)=\dfrac{3}{2}}$, $\mathbf{E}(Y)=\dfrac{0+2}{2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(Y)=1}$ et, par linéarité, $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Y)$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(Z)=\dfrac{1}{2}}$.

c. $\mathbf{P}(X>Y)=\mathbf{P}(Z>0)=\mathbf{P}(Z=1)+\mathbf{P}(Z=2)+\mathbf{P}(Z=3)$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X>Y)=\dfrac{1}{2}}$.

$\mathbf{P}(X=Y)=\mathbf{P}(Z=0)$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X=Y)=\dfrac{1}{4}}$.

$\mathbf{P}(X<Y)=\mathbf{P}(Z<0)=\mathbf{P}(Z=-2)+\mathbf{P}(Z=-1)$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X<Y)=\dfrac{1}{4}}$.

3. Sur une partie

a. Notons A_n l'évènement « il y a égalité à la n-ième partie ». Alors, la probabilité que $X=Y$ au n-ième lancer est $\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$ (car pour qu'il y ait égalité à la n-ième partie, il faut qu'il y ait une n-ème partie et donc qu'il y ait eu égalité à toutes les parties précédentes). D'après la formule de probabilités composées, on en déduit que

$$\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

donc $\boxed{\text{la probabilité que } X=Y \text{ au } n\text{-ième lancer est } \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.
Notons B_n l'évènement « Bill gagne au n-ème lancer » et M_n l'évènement « Marc gagne au n-ème lancer ». Alors,

$$\mathbf{P}(B_{n+1})=\mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1}\mid A_n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

et

$$\mathbf{P}(M_{n+1})=\mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(M_{n+1}\mid A_n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Ainsi, d'une part, $\boxed{\text{la probabilité que Bill gagne au } n\text{-ème lancer est } \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$ et, d'autre part, $\boxed{\text{la probabilité que Marc gagne au } n\text{-ème lancer est } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

b. La probabilité que Marc gagne la partie est $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right)$ et cette union est disjointe donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(M_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

donc $\boxed{\text{la probabilité que Marc gagne la partie est } \frac{2}{3}}$. De même, la probabilité que Bill gagne la partie est

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{j+1} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{j} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

donc $\boxed{\text{la probabilité que Bill gagne la partie est } \frac{1}{3}}$.

c. Notons G_M la variable aléatoire égale au gain en dollars de Marc. Alors, $G_M(\Omega) = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1{,}2na \mid n \in \mathbb{N}\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_M = nb) = M_n$ et $(G_M = -1{,}2na) = B_n$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(G_M) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nb\mathbf{P}(G_M = nb) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1{,}2na)\mathbf{P}(G_M = -1{,}2na) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} nb\mathbf{P}(M_n) - \sum_{n=1}^{+\infty} 1{,}2na\mathbf{P}(B_n) \\
&= \frac{b}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1{,}2a}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{b}{2} - \frac{1{,}2a}{4}\right) \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(G_M) = \frac{4(2b-1{,}2a)}{9}}$.

Si on note G_B le gain de Bill alors ce que gagne Marc, Bill le perd ou inversement donc $G_M + G_B = 0$ donc $G_B = -G_M$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(G_B) = \dfrac{4(1{,}2a-2b)}{9}$.

d. Le jeu est équitable si et seulement si $2b - 1{,}2a = 1{,}2a - 2b$ i.e. $\boxed{b = 0{,}6a}$. Dans ce cas, l'espérance commune de gain est $\dfrac{4(2 \times 0{,}6a - 1{,}2a)}{9} = 0$ (ce qui était prévisible puisque $\mathbf{E}(G_B) = -\mathbf{E}(G_M)$).

Probabilités continues (2019)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a\sin^2(x) & \text{si } x \in [0\,;\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **Valeur de a**
   - **a.** On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer $I + J$.
   - **b.** Donner la dérivée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire la valeur de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
   - **c.** Montrer que l'on a $J - I = 0$.
   - **d.** En déduire la valeur de I.
   - **e.** Déterminer la valeur du nombre réel x pour que la fonction f soit une densité de probabilité. On conserve cette valeur par la suite.

     On considère désormais X, une variable aléatoire de densité f.
2. **Espérance de X**
   - **a.** Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$.
   - **b.** En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
   - **c.** Trouver des coefficients réels α et β tels que, pour tout réel x, on a :

     $$\sin^2(x) = \alpha + \beta\cos(2x).$$
   - **d.** En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance que l'on calculera.
3. **Fonction de répartition**
   - **a.** Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^2(x)$. On pourra utiliser la question **2.c.**.
   - **b.** Si x est un réel n'appartenant pas à l'intervalle $[0\,;\pi]$, calculer la probabilité $\mathbf{P}(X \leqslant x)$.
   - **c.** Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
   - **d.** Calculer la probabilité de l'évènement $(|X| \leqslant \frac{\pi}{2})$.
4. **Espérance de $\cos(X)$**

   On pose $Y = \cos(X)$. On admet que la variable aléatoire Y admet une espérance.
   - **a.** Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **b.** Donner alors la valeur de l'espérance de Y.

Solution

1. **Valeur de a**
   - **a.** Par linéarité de l'intégrale,

     $$I + J = \int_0^{\pi} \sin^2(x) + \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{\pi}$$

     donc $\boxed{I + J = \pi}$.

b. Notons $h : x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$. Alors, pour tout réel x, $h'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = \cos(2x)$. On en déduit que

$$K = \int_0^{\pi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin(2\pi) - \frac{1}{2}\sin(0)$$

donc $\boxed{K = 0}$.

c. Par linéarité de l'intégrale,

$$J - I = \int_0^{\pi} \cos^2(x) - \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, par les formules de duplication, pour tout réel x, $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ donc $J - I = K$ i.e. $\boxed{J - I = 0}$.

d. On en déduit que $I = J$ donc, comme $I + J = \pi$, $2I = \pi$ i.e. $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2}}$.

e. La fonction f est continue par morceaux et positive (si $a \geqslant 0$) sur $\mathbb{R}$ donc f est une densité de probabilité si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ i.e. $\displaystyle\int_0^{\pi} a\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que f est une densité de probabilité si et seulement si $aI = 1$ i.e. si et seulement si $\boxed{a = \dfrac{2}{\pi}}$.

2. Espérance de X

a. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{4}\cos(2x)}$.

b. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto 1$ et $v : x \longmapsto \cos(2x)$. Alors, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x \times \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = -\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = 0}$.

c. Par les formules d'addition, pour tout réel x, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc on en déduit que $\boxed{\sin^2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)}$.

d. Comme f est nulle en dehors de $[0\,;\pi]$, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge, ce qui est le cas car $x \longmapsto xf(x)$ est continue sur $[0\,;\pi]$. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x\cos(2x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} - 0\right)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{\pi}{2}}$.

3. Fonction de répartition

a. On a vu que, pour tout réel x, $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ donc une primitive de $x \longmapsto \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin(2x)}$.

b. Distinguons deux cas.

Si $x < 0$ alors $\mathrm{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0}$.

Si $x > \pi$ alors $\mathrm{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \frac{2}{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant x) = 1}$.

c. Si $x \in [0\,;\pi]$ alors, d'après la question **a.**,

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \frac{2}{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^x = \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\sin(2x).$$

On conclut que la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\pi} - \dfrac{1}{2\pi}\sin(2x) & \text{si } x \in [0\,;\pi] \\ 1 & \text{si } x > \pi \end{cases}}.$$

d. Comme $(|X| \leqslant \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{2})$, on a

$$\mathbf{P}\left(|X| \leqslant \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{\pi}{2}\right) - \mathbf{P}\left(X < \frac{\pi}{2}\right).$$

Or, X est une variable aléatoire à densité donc $\mathbf{P}(X < \frac{\pi}{2}) = \mathbf{P}(X \leqslant \frac{\pi}{2})$ donc

$$\mathbf{P}\left(|X| \leqslant \frac{\pi}{2}\right) = F_X\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_X\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\sin(\pi) - 0$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(|X| \leqslant \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}}$.

4. Espérance de $\cos(X)$

a. On reconnaît une forme $u'u^n$ donc

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\sin^3(\pi) - \frac{1}{3}\sin^3(0)$$

i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = 0}$.

b. Par le théorème de transfert, l'espérance de Y est

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

donc, par la question précédente, $\boxed{\mathbf{E}(Y) = 0}$.