⧫ Révisions – février 2024

Algèbre (2016)

Dans tout cet exercice, les matrices considérées sont à coefficients réels. On note, de plus, dans tout l'exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle enfin f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A.

1. Diagonalisation de A

a. i. Calculer le rang de f.

ii. En déduire la dimension du noyau de f.

iii. Montrer que 0 est une valeur propre de f, et que la famille $((-1, 2, 0))$ est une base du sous-espace propre associé.

b. i. Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 8(x, y, z)$.

ii. Montrer que 8 est valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 8. Les coefficients du ou des vecteurs propres formant cette base seront des entiers.

c. i. Calculer $f(1, -1, 0)$.

ii. En déduire une troisième valeur propre de f, et donner une base du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

d. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

e. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer l'inverse de P.

f. Donner une relation entre P^{-1}, A, P et D.

2. Résolution d'une première équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrice N, de taille 3×3, à coefficients réels, telles que :

$$(E) \; N^3 = D.$$

a. Question Préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

i. l'équation $x^3 = 8$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$;

ii. l'équation $x^3 = -1$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}$.

b. Soit N une matrice qui vérifie (E). Montrer qu'alors $DN = ND$.

c. En déduire que la matrice N est diagonale. On pourra commencer par écrire $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et en déduire un système d'équation portant sur les coefficients de la matrice N.

d. En écrivant N sous la forme $N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice N qui vérifie (E), et donner cette matrice.

3. Résolution d'une seconde équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices M, de taille 3×3, telles que :

$$(E')\ M^3 = A.$$

a. Soit M une matrice de taille 3×3. Montrer que :

$$M^3 = A \iff (P^{-1}MP)^3 = D.$$

b. En déduire la ou les solutions de (E').

c. Existe-t-il des matrices M à coefficients réels telles que $M^2 = A$?

Algèbre (2015)

On définit, pour tout nombre réel a, la matrice :

$$M_a = \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

1. a. On considère l'équation :

$$(x-1)(x+2)+2 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Résoudre cette équation.

b. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?

c. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de la matrice M_a.

2. Donner une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice M_a.

3. Donner une matrice P inversible, de taille 2×2, telle que la matrice $P^{-1}M_aP$ est diagonale.

4. Soit a et b deux nombres réels. Montrer que $M_aM_b = M_bM_a$.

5. Soit n un entier naturel non nul. On considère la matrice A_n suivante :

$$A_n = M_1M_2M_3 \cdots M_n$$

obtenue en effectuant le produit des n matrices M_1, M_2, ..., M_n. Donner, en fonction de n, quatre nombres réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

6. On considère deux suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ telles que $u_1 = -2$, $v_1 = 4$ et qui vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = (n-1)u_n - v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + (n+2)v_n.$$

Donner, en fonction de n, une expression du terme général u_n de la suite.

Analyse (2012)

1. Ensemble de définition

x désigne un réel strictement positif.

a. Justifier la continuité sur le segment $[0\,;1]$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{x+t}$.

b. En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Dans la suite du problème, f désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,, \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Monotonie de la fonction f

a. x et y désignent deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$.

i. Montrer que :

$$\forall t \in [0\,;1]\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^t}{y+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}.$$

ii. En déduire que $f(y) \leqslant f(x)$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$?

3. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. Commençons par étudier la limite de f en $+\infty$.

i. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

ii. En déduire la limite de f en $+\infty$.

b. Étudions maintenant la limite de f en 0.

i. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

ii. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

iii. En déduire la limite de f en 0.

4. Représentation graphique

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

a. Interpréter graphiquement les résultats des questions **3.a.**ii. et **3.b.**iii.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

5. Équivalent en 0

a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En remarquant que, pour tout réel u, $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u - 1 + 1$, montrer que :

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\,\mathrm{d}u\right).$$

c. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}.$$

Démontrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du problème, Φ désigne une primitive sur $\mathbb{R}$ de φ.

6. Pour tout réel strictement positif x, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\,\mathrm{d}u$ en fonction de Φ et de x.
En déduire que $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie quand x tend vers 0, limite que l'on ne cherchera pas à évaluer.

7. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Analyse (2008)

1. Ensemble de définition

a. Soit x appartenant à $]1\,;+\infty[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.

b. Soit x appartenant à $]0\,;1[$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ et déterminer son signe.

Nous pouvons ainsi définir une fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

2. Étude de la dérivabilité

a. Justifier l'existence d'une primitive H de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]1\,;+\infty[$, puis exprimer pour tout réel x appartenant à $]1\,;+\infty[$, $f(x)$ en fonction de $H(x^2)$ et $H(x)$.
En déduire que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer f'.
Quel est le sens de variations de f sur $]1\,;+\infty[$?

b. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et calculer f'.
Quel est le sens de variations de f sur $]0\,;1[$?

3. Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

a. Étude en 0 par valeurs supérieures

Soit x appartenant à $]0\,;1[$. Montrer que, pour tout t appartenant à $[x^2\,;x]$,

$$\frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(x^2)}$$

et en déduire que

$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.$$

Montrer alors que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en 0 de f ainsi prolongée.

La fonction f ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.

À l'aide de l'encadrement précédent, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ a pour limite 0 en 0.

Que peut-on en déduire sur la fonction f ? Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Étude en l'infini

En s'inspirant de la méthode décrite en **a.**, pour tout réel x appartenant à $]1\,;+\infty[$, encadrer $f(x)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Étude en 1 par valeurs supérieures

Soit x appartenant à $]1\,;+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(2)$.

En remarquant que $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} t \times \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$, montrer que $x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de f en 1 par valeurs supérieures.

d. Étude en 1 par valeurs inférieures

Par un travail similaire à celui de la question précédente, montrer que $f(x)$ a pour limite $\ln(2)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

e. Prolongement par continuité de f en 1

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

La fonction ainsi prolongée est toujours notée f dans la suite.

4. Représentation graphique de f

a. Résumer les résultats précédents en dressant le tableau de variations de f (prolongée par continuité en 0 et en 1).

b. Tracer l'allure de la courbe de f. On pourra utiliser le fait que $\ln(2) \approx 0{,}69$.

Probabilités discrètes sur un univers fini (2013)

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\dfrac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D2 à 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

— nous commençons par jeter la pièce,

— si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D1, sinon nous choisissons le dé D2, choix définitif pour la suite de l'expérience,

— ensuite, nous jetons plusieurs fois le dé choisi et, pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

— D1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D1 »,

— D2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D2 »,

— pour tout entier naturel non nul n, R_n est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}(\mathrm{D1})$? $\mathbf{P}(\mathrm{D2})$?

Montrer que $\{\mathrm{D1}, \mathrm{D2}\}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs de $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_n)$? de $\mathbf{P}_{\mathrm{D2}}(\mathrm{R}_n)$?
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{R}_1)$.
4. Établir un lien entre les probabilités $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1)$, $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_2)$ et $\mathbf{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.
   En déduire la valeur de $\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,
$$\mathbf{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$
   En déduire, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$.
6. Calculer $\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2}(\mathrm{D1})$ puis, de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, montrer que :
$$\mathbf{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{R}_n}(\mathrm{D1}) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$
7. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1 ou sur le fait d'avoir un face rouge au lancer suivant ?

Probabilités discrètes sur un univers infini (2007)

a et b désignent des entiers naturels. Le taux de change est de 1,2 dollar = 1 euro.

Règle du Jeu : Marc et Bill jouent à pile ou face.

À chaque lancer, Marc lance 3 pièces de 1 euro et Bill 2 pièces de 1 dollar. Ils lancent simultanément les cinq pièces. On note X le nombre de « face » des pièces européennes et Y le nombre de « face » des pièces américaines.

À chaque lancer, Marc met en jeu une (nouvelle) mise de a euros et Bill une (nouvelle) mise de b dollars.

Si $X > Y$, Marc gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $X < Y$, Bill gagne la partie, qui se termine, et encaisse la totalité des mises ; si $X = Y$, ils lancent à nouveau les pièces (non sans avoir rajouté a euros pour Marc, b dollars pour Bill).

1. **Quelques calculs préliminaires**
   - **a.** Donner le domaine de convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ainsi que sa somme.
   - **b.** Pour $x \in]-1\,;1[$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.
2. **Sur un lancer**
   - **a.** Donner les lois de probabilités pour chacune des variables aléatoires X, Y et $Z = X - Y$.
   - **b.** Calculer l'espérance des variables aléatoires X, Y et Z.
   - **c.** Calculer les probabilités des évènements $[X > Y]$, $[X = Y]$ et $[X < Y]$.
3. **Sur une partie**
   - **a.** Calculer la probabilité que $X = Y$ au n-ième lancer.
     Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie au $(n+1)$-ème lancer.
   - **b.** Pour chaque joueur, calculer la probabilité de gagner la partie.
   - **c.** Calculer l'espérance du gain de Marc en dollars (le gain étant le différence entre ce que l'on a misé et ce qu'on l'a encaissé). En déduire l'autre.
     On dit que le jeu est équitable si les deux espérances sont égales.
   - **d.** Déterminer à quelle condition le jeu est équitable et donner l'espérance commune dans ce cas.

Probabilités continues (2019)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a\sin^2(x) & \text{si } x \in [0\,;\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **Valeur de a**
   a. On pose $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer $I + J$.
   b. Donner la dérivée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire la valeur de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
   c. Montrer que l'on a $J - I = 0$.
   d. En déduire la valeur de I.
   e. Déterminer la valeur du nombre réel x pour que la fonction f soit une densité de probabilité. On conserve cette valeur par la suite.
   On considère désormais X, une variable aléatoire de densité f.
2. **Espérance de X**
   a. Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$.
   b. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.
   c. Trouver des coefficients réels α et β tels que, pour tout réel x, on a :

   $$\sin^2(x) = \alpha + \beta\cos(2x).$$

   d. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance que l'on calculera.
3. **Fonction de répartition**
   a. Donner une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^2(x)$. On pourra utiliser la question **2.c.**.
   b. Si x est un réel n'appartenant pas à l'intervalle $[0\,;\pi]$, calculer la probabilité $\mathbf{P}(X \leqslant x)$.
   c. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
   d. Calculer la probabilité de l'évènement $(|X| \leqslant \frac{\pi}{2})$.
4. **Espérance de $\cos(X)$**
   On pose $Y = \cos(X)$. On admet que la variable aléatoire Y admet une espérance.
   a. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Donner alors la valeur de l'espérance de Y.