⧫ Révisions – Avril 2025 – Corrigés

Algèbre (2020)

Si a est un nombre réel, on note $M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$. On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_a.

Par ailleurs, on rappelle que $(x\,;y)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, la nombre réel $\|(x\,;y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ est la **norme** du vecteur $(x\,;y)$.

1. Exemples.

a. Calculer M_0, $M_{\frac{\pi}{2}}$ et M_π. (Autrement dit, calculer M_a dans les cas $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$ et $a = \pi$.)

b. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Donner un réel $a \in [0\,;2\pi[$ tel que $A = M_a$.

2. Premières propriétés. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Calculer le déterminant de M_a. L'application f_a est-elle bijective ? Que dire du noyau de f_a ?

b. Calculer $f_a((1\,;0))$ et $f_a((0\,;1))$. En déduire $\|f_a((1\,;0))\|$ et $\|f_a((0\,;1))\|$.

c. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que le vecteur $f_a((x\,;y))$ et le vecteur $(x\,;y)$ ont la même norme.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f_a et $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé.
Montrer que $\|f_a(u)\| = |\lambda| \times \|u\|$. En déduire que λ vaut soit 1, soit une autre valeur réelle que l'on précisera.

3. On s'intéresse aux valeurs propres **complexes** de M_a.

a. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Trouver des coefficients α et β **réels**, que l'on exprimera en fonction de a, et vérifiant, pour tout nombre complexe z :

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - 2\alpha z + \beta.$$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant de $M_a - \lambda I_2$ vaut $(\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a})(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})$.

c. Pour quelles valeurs de λ, la matrice $M_a - \lambda I_2$ est-elle *non* inversible ?

d. Expliquer pourquoi les valeurs propres (complexes) de M_a sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

4. Application. Existe-t-il un réel a et une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_a est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$? *Indication : chercher d'abord les valeurs propres de cette matrice. Sont-elles de la forme* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ *et* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$ *?*

5. Si a et b sont deux nombres réels, montrer que $M_{a+b} = M_a M_b$.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un réel $a \in]0\,;2\pi[$ tel que $M_a^n = I_2$. On exprimera un tel réel a en fonction de n et de π.

Solution.

1. a. Par définition, $M_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_0 = I_2}$, $M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ et $M_\pi = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_\pi = -I_2}$.

b. On cherche un réel a tel que $\cos(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, $a = \frac{\pi}{4}$ convient donc $\boxed{A = M_{\frac{\pi}{4}}}$.

2. a. $\det(M_a) = \cos^2(a) - (-\sin^2(a)) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$. Comme $\det(M_a) \neq 0$, f_a est bijective. Elle est en particulier injective donc $\boxed{\ker f_a = \{(0\,;0)\}}$.

b. $f_a((1\,;0)) = (\cos(a)\,;\sin(a))$ et $f_a((0\,;1)) = (-\sin(a)\,;\cos(a))$. On en déduit que $\|f_a((1\,;0))\| = \sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \sqrt{1} = 1$ et $\|f_a((0\,;1))\| = \sqrt{\sin^2(a) + \cos^2(a)} = \sqrt{1} = 1$.

c. Par définition,

$$f_a((x\,;y)) = (\cos(a)x - \sin(a)y\,;\sin(a)x + \cos(a)y)$$

donc

$$\begin{aligned}
&\|f_a(x)\| = \sqrt{(\cos(a)x - \sin(a)y)^2 + (\sin(a)x + \cos(a)y)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2(a)x^2 - 2\cos(a)\sin(a)xy + \sin^2(a)y^2 + \sin^2(a)x^2 + 2\sin(a)\cos(a)xy + \cos^2(a)y^2} \\
&= \sqrt{(\cos^2(a) + \sin^2(a))(x^2 + y^2)} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Or, $\|(x\,;y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $\boxed{\|f_a((x\,;y))\| = \|(x\,;y)\|}$.

d. Par définition, $f_a(u) = \lambda u$ donc $\boxed{\|f_a(u)\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|}$. Or, d'après la question précédente, $\|f_a(u)\| = \|u\|$ donc $\|u\| = |\lambda| \times \|u\|$. De plus, $u \neq 0$ donc $\|u\| \neq 0$ et ainsi, en divisant par $\|u\|$, on conclut que $|\lambda| = 1$ donc $\boxed{\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1}$.

3. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = z^2 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$$

Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$ et, par le formule d'Euler, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = 2\cos(a)$ donc

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - 2\cos(a)z + 1.$$

Ainsi, $\boxed{\alpha = \cos(a) \text{ et } \beta = 1}$.

b. Par définition,

$$\begin{aligned}
\det(M_a - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \cos(a) - \lambda & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) - \lambda \end{vmatrix} &= (\cos(a) - \lambda)^2 + \sin^2(a) \\
&= \cos^2(a) - 2\cos(a)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(a) \\
&= \lambda^2 - 2\cos(a)\lambda + 1
\end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente, $\boxed{\det(M_a - \lambda I_2) = (\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a})(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})}$.

c. La matrice $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\det(M_a - \lambda I_2) = 0 \iff \left(\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = 0 \iff \lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} = 0 \text{ ou } \lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = 0$$
$$\iff \lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \text{ ou } \lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}.$$

Ainsi, $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ ou $\lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

d. Par définition, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $M_a - \lambda I_2$ n'est pas injective, comme il s'agit d'une matrice carré, si et seulement si $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Ainsi, par la question précédente, les valeurs propres complexes de M_a sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

4. Posons $N = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Comme N est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, c'est-à-dire 5 et -4. Or, $|5| = 5$ et, pour tout réel a, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}| = 1$ donc, quelle que soit la valeur de a, 5 n'est pas valeur propre de M_a et donc 5 n'est pas valeur propre de f_a. Ainsi, il n'existe pas de réel a et de base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que la matrice de f_a dans $\mathcal{B}$ est N.

5. Par les formules d'addition,

$$\begin{aligned}
M_a M_b &= \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{M_a M_b = M_{a+b}}$.

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_a^n = M_{na}$. Comme $M_a^0 = I_2$ et $M_{0a} = M_0 = I_2$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang $n = k$. Alors, d'après la question précédente,

$$M_a^{k+1} = M_a^k M_a = M_{ka} M_a = M_{ka+a} = M_{(k+1)a}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = k + 1$.
Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_a^n = M_{na}$.
Dès lors, comme cos et sin sont 2π-périodiques, $M_{2\pi} = M_0 = I_2$ donc $M_{\frac{2\pi}{n}}^n = M_{\frac{2\pi}{n} \times n} = M_{2\pi} = I_2$. Comme $\frac{2\pi}{n} \in \,]0\,;2\pi[$, on conclut que $\boxed{a = \frac{2\pi}{n} \text{ convient}}$.

Algèbre (2024)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que U est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre que l'on précisera.

2. Déterminer un vecteur propre V de A associé à la valeur propre 0, de première coordonnée égale à 1.

3. Déterminer le réel α tel que le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1.

4. Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On précisera D, (on écrira ses coefficients diagonaux dans l'ordre croissant), ainsi que P, mais on ne calculera pas P^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au sous-ensemble F_A suivant de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}.$$

On rappelle que $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.

5. On note O_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité.

a. La matrice O_3 appartient-elle à F_A ?

b. La matrice I_3 appartient-elle à F_A ?

6. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}M$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice P déterminée précédemment. Démontrer l'équivalence :

$$AM = M \iff DN = N.$$

7. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des nombres réels.

a. Calculer le produit DN.

b. On suppose que la matrice N vérifie l'égalité $DN = N$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

c. La réciproque de la propriété démontrée à la question précédente est-elle vraie ?

8. En déduire les matrices M appartenant à F_A.

Solution.

1. Commençons par remarquer que le vecteur U est non nul. De plus,

$$AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -U$$

donc $\boxed{U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -1}$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \\ -2x + 0 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $x = 1$, $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 0}$ (puisque V est non nul).

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Alors,

$$AW = W \iff \begin{cases} -1 + \alpha = 1 \\ 0 = 0 \\ -2 + 2\alpha = \alpha \end{cases} \iff \alpha = 2.$$

Ainsi, comme W est non nul, $\boxed{W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

4. La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes : -1, 0 et 1 donc, par théorème, A est diagonalisable.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe une matrice diagonale } D \text{ et une matrice inversible } P \text{ telle que } A = PDP^{-1}}$.
De plus, les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs propres associés donc, en ordonnant les valeurs propres par ordre croissant sur la diagonale de D, on obtient

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

.

5. **a.** Étant donné que $AO_3 = O_3$, $\boxed{O_3 \in F_A}$.

b. Étant donné que $AI_3 = A \neq I_3$, $\boxed{I_3 \notin F_A}$.

6. Rappelons que $A = PDP^{-1}$. Dès lors, par associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AM = M &\iff (PDP^{-1})M = PD(P^{-1}M) = M \iff PDN = M \\ &\iff P^{-1}(PDN) = P^{-1}M \iff (P^{-1}P)DN = N \end{aligned}$$

soit finalement, comme $P^{-1}P = I_3$,

$$\boxed{AM = M \iff DN = N}.$$

7. a. Le calcul donne

$$DN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{DN = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}}.$$

b. Comme $DN = N$,

$$\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} -a = a \\ -b = b \\ -c = c \\ 0 = d \\ 0 = e \\ 0 = f \\ g = g \\ h = h \\ i = i \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}}.$$

c. Réciproquement, supposons que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors, en particulier, $a = b = c = 0$ donc, d'après le calcul de la question (a), $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ i.e. $DN = N$. Ainsi, $\boxed{\text{la réciproque est vraie}}$.

8. Ainsi, d'après les deux questions précédentes, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $DN = N$ si et seulement s'il existe des réels g, h et i tels que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Or, d'après la question

6., $M \in F_A$ si et seulement si $(P^{-1}M)D = P^{-1}M$. Ainsi, on en déduit que $M \in F_A$ si et seulement s'il existe des réels g, h et i tels que $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ i.e. $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Or, pour tous réels g, h et i,

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{F_A = \left\{ \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \;\middle|\; (g,h,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}}.$$

Remarque. On peut constater que

$$F_A = \left\{ g\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (g,h,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

donc, en posant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$F_A = \{gM_1 + hM_2 + iM_3 \mid (g,h,i) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$$

ce qui prouve que F_A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par M_1, M_2, M_3.

Analyse (2023)

Dans cet exercice, on considère la fonction $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \geqslant 1$, par la relation :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et positive. Pour tout $x \geqslant 0$, montrer alors que l'on a les deux inégalités :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Ces inégalités pourront être utilisées dans la suite de l'exercice.

2. Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

On **admet** que la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc admet une primitive sur $[1\,;+\infty[$. On note U une primitive de u dans la suite de l'exercice.
On ne cherchera pas à calculer U.

3. Notons g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par la relation $g(x) = U(2x)$.
Montrer que g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et prouver que, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

4. Montrer que f est dérivable et que l'on a, pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

5. Donner le sens de variation de la fonction f.
On pourra utiliser l'une des deux inégalités de la question 1.

Solution.

1. Soit $x \geqslant 0$. Alors, $x + x \geqslant 0 + x$ c'est-à-dire $2x \geqslant x$ donc, comme $-1 < 0$, $-2x \leqslant -x$. Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $\boxed{0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}$.

Comme exp est positive sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $-\mathrm{e}^{-2x} \leqslant 0$ et, ainsi, $\boxed{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

2. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Alors, pour tout $t \in [x\,;2x]$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $t > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0$. De plus, comme $x > 0$, $2x > x$ donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f(x) \geqslant 0}$.

3. Par définition, la fonction U est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et $U' = u$. De plus, $x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $2x \in [1\,;+\infty[$ donc, par composition, g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = 2U'(2x) = 2u(2x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}}.$$

4. Comme U est une primitive de u sur $[1\,;+\infty[$, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \int_x^{2x} u(t)\,\mathrm{d}t = U(2x) - U(x) = g(x) - U(x).$$

Or, les deux fonctions U et g sont dérivables sur $[1\,;+\infty[$ donc, par différence, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = g'(x) - U'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - u(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}}.$$

5. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. D'après le résultat de la question **1.**, $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$ et, comme $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ donc $\underline{f \text{ est décroissante sur } [1\,;+\infty[}$.

Analyse (2024)

Partie A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Calculer $f(1)$.

2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donner son signe.

b. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. En déduire que f est une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Justifier que l'équation $x+\ln(x) = n$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, que l'on note u_n.

b. Donner u_1.

Dans la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à déterminer explicitement u_n. On notera de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n vérifie l'égalité $f(u_n) = n$, soit

$$u_n + \ln(u_n) = n \quad (*).$$

Partie B. Étude de la suite (u_n)

1. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. On admet que, pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln(x) \leqslant x$.

a. En utilisant la relation $(*)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{n}{2}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution.

Partie A. Étude d'une fonction

1. $f(1) = 1\ln(1) = 1 + 0 = 1$ d'où $\boxed{f(1) = 1}$.

2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ d'où $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f'(x) = 1 + \frac{1}{x}}$.

Par stricte positivité de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ et somme de nombres strictement positifs, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f'(x) > 0}$.

b. Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$.

3. a. Étant donné que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. Comme la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, par le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]0\,;+\infty[\text{ vers } \mathbb{R}}$ car $f(]0\,;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \in \mathbb{R}$ et comme f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, n admet un unique antécédent par f dans $]0\,;+\infty[$.

Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } x + \ln(x) = n \text{ admet une unique solution dans }]0\,;+\infty[}$.

b. Comme $f(1) = 1$ d'après A.1, le réel 1 est solution de $(*)$ dans $]0\,;+\infty[$ donc, par l'unicité prouvée en A.4.(a), 1 est l'unique solution de $x + \ln(x) = 1$ d'où $\boxed{u_1 = 1}$.

Partie B. Étude de la suite (u_n)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition même de u_n et u_{n+1}, on a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$ si bien que $\boxed{f(u_n) < f(u_{n+1})}$.

Les nombres u_n et u_{n+1} sont deux réels appartenant à $]0\,;+\infty[$ tels que $f(u_n) < f(u_{n+1})$ donc, par stricte croissance de f sur $]0\,;+\infty[$, $u_n < u_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition même de u_n, on sait que $u_n > 0$ et $u_n + \ln(u_n) = n$.

Grâce à l'inégalité admise dans l'énoncé, on en déduit que $\ln(u_n) \leqslant u_n$ donc $u_n + \ln(u_n) \leqslant u_n + u_n$ et ainsi $n \leqslant 2u_n$ c'est-à-dire $\frac{n}{2} \leqslant u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \frac{n}{2}}$.

b. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{n}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, par le théorème de comparaison, on a également : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Probabilités (2020)

Si l'on dispose de k jetons que l'on place dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie **1.** est indépendante des suivantes.

1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes a et b.

Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a, et une chance sur deux d'être dans l'urne b. Il en est de même pour chacun des quatre autre jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

1. Reconnaître la loi de X.

2. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X, l'évènement « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'évènement « L'urne b est vide ».

3. En déduire la probabilité de l'évènement « L'un des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas général de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de **trois** urnes appelées a, b et c.

De même que précédemment, chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, un chance sur trois d'être dans l'urne b, et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit $i \in [\![1,5]\!]$ et E_i l'évènement « Le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'évènement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'évènement E_i.

2. Soit V_a l'évènement « L'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des fonctions E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5.

3. En déduire que $P(V_a) = \dfrac{2^5}{3^5}$.
Par symétrie du problème, on pourra admette que la probabilité $P(V_b)$ que b soit vide et que la probabilité $P(V_c)$ que c soit vide ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N.

3) Calcul de $P(N = 2)$ et de $P(N = 3)$

1. Que signifie, en français, l'évènement $(N = 3)$? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*

2. Que signifie, en français, l'évènement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.
On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.

3. Calculer la probabilité de l'évènement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'évènement $(N = 2)$ en fonction d'évènements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

4) Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N.

1. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (Z_c vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon) . Reconnaître la loi et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a, Z_b et Z_c.

2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c.

3. Calculer alors l'espérance de N.

5) Loi de N

1. Montrer que $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \dfrac{2^5}{3^4}$.

2. En déduire la valeur de $P(N = 1)$.

3. Donner enfin le loi de la variable aléatoire N. On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

Solution.

1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

1. Si on note, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si on place le jeton i dans l'urne a et 0 sinon alors X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. De plus, les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 sont indépendantes et, par définition, $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ donc $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale } \mathscr{B}(5, \frac{1}{2})}$.

2. L'évènement « L'urne a est vide » est l'évènement $\{X=0\}$ et l'évènement « L'urne b est vide » est l'évènement $\{X=5\}$.

3. L'évènement « L'une des deux urnes est vide » est l'évènement $\{X=0\}\cup\{X=5\}$ et cette union est disjointe donc la probabilité de cet évènement est

$$\begin{aligned}P(X=0)+P(X=5) &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-0}+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-5}\\ &= \frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}=\frac{2}{2^5}=\frac{1}{2^4}\end{aligned}$$

soit $\boxed{P(X=0)+P(X=5)=\frac{1}{16}}$.

2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Par hypothèse, $P(\overline{E_i})=\frac{1}{3}$ donc $P(E_i)=1-P(\overline{E_i})=\frac{2}{3}$.

2. V_a est réalisé si aucun jeton n'est dans l'urne a donc $V_a=E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4\cap E_5$.

3. Par hypothèse, les évènements E_i sont deux à deux indépendants dons

$$P(V_a)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)P(E_5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

soit $\boxed{P(V_a)=\frac{2^5}{3^5}}$.

3) Calcul de $P(N=2)$ et de $P(N=3)$

1. $(N=3)$ signifie que les 3 urnes sont vides ce qui est un évènement impossible puisque chaque jeton est placé dans une urne. Ainsi, $\boxed{P(N=3)=0}$.

2. L'évènement $\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c$ signifie que les urnes b et c sont vides mais pas l'urne a, c'est-à-dire que tous les jetons ont été placés dans l'urne a. On a donc $\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c=\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4}\cap\overline{E_5}$ et, par indépendance, on en déduit que $\boxed{P(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c)=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}}$.

3. $(N=2)$ signifie que deux des trois urnes sont vides donc

$$(N=2)=(\overline{V_a}\cap V_b\cap V_c))\cup(V_a\cap\overline{V_b}\cap V_c)\cup(V_a\cap V_b\cap\overline{V_c}).$$

Il s'agit d'une union de trois évènements incompatibles donc $P(N=2)=3\times\frac{1}{3^5}=\frac{1}{3^4}$

c'est-à-dire $\boxed{P(N=2)=\frac{1}{81}}$.

4) Espérance de N

1. Par définition, Z_a, Z_b et Z_c suivent des lois de Bernoulli de paramètres $P(V_a)=P(V_b)=P(V_c)=\frac{2^5}{3^5}$. On a donc $E(Z_a)=E(Z_b)=E(Z_c)=\frac{2^5}{3^5}$.

2. Par définition, $N=Z_a+Z_b+Z_c$.

3. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $E(N)=E(Z_a)+E(Z_b)+E(Z_c)=3\times\frac{2^5}{3^5}=\frac{2^5}{3^4}$ c'est-à-dire $E(N)=\frac{32}{81}$.

5) Loi de N

1. Par définition, l'espérance de N est $E(N) = \sum_{i=0}^{3} iP(N=i)$. Or, pour $i=0$, $iP(N=i)=0$ et, pour $i=3$, $iP(N=i)=0$ car $P(N=3)=0$. Ainsi, $E(N) = P(N=1)+2P(N=2)$ et donc, par le résultat de la partie précédente, $P(N=1)+2P(N=2) = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81}$.

2. On en déduit que $P(N=1) = \frac{32}{81} - 2P(N=2) = \frac{32}{81} - 2\times\frac{1}{81} = \frac{30}{81}$ c'est-à-dire $\boxed{P(N=1) = \frac{10}{27}}$.

3. En tenant compte du fait que $\sum_{i=0}^{3} P(N=i) = 1$, on aboutit à la loi suivante :

i	0	1	2	3
$P(N=i)$	$\frac{50}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{81}$	0

Probabilités (2024)

Rappels

- On rappelle que la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
- On rappelle également les valeurs remarquables suivantes :
$$\arctan(0) = 0 \text{ et } \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$
ainsi que la limite :
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : On admettra que toutes les intégrales généralisées rencontrées dans cet exercice sont convergentes, sauf à la question 4. En particulier, on ne demande pas de justifier leur convergence.

1. a. Soit $A>0$. Calculer l'intégrale $\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2} & \text{si } t\geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X admettant la fonction f pour densité.

2. Calculer $P(X \geqslant 1)$ et $P(X < -2)$.

3. Soit F_X la fonction de répartition de X.

a. Donner sans calcul la valeur de $F_X(a)$ pour tout $a < 0$.

b. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$, on peut écrire

$$F_X(a) = k \arctan(a),$$

où k est un réel que l'on déterminera.

4. **a.** Soit $A > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$. On pourra utiliser le changement de variable $u = 1 + t^2$.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

c. Que peut-on en déduire concernant la variable aléatoire X ?

5. On considère la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X}$, et on note F_Y sa fonction de répartition.

a. Soit $a > 0$. Justifier que $P(Y \leqslant a) = P\left(X \geqslant \dfrac{1}{a}\right)$, puis que $F_Y(a) = 1 - F_X\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

b. En déduire que pour tout $a > 0$, $F_Y(a) = F_X(a)$. On pourra utiliser l'égalité suivante, vraie pour tout $a > 0$,

$$\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c. On admet que l'égalité $F_Y(a) = F_X(a)$ est encore vraie pour $a \leqslant 0$. Que dire de la loi de Y ?

Solution.

1. **a.** Comme arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$,

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0)$$

donc, comme $\arctan(0) = 0$,

$$\boxed{\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(A)}.$$

b. On en déduit que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}.$$

c. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle (quotient de polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est nulle sur $]-\infty\,;0[$ donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $t < 0$, $f(t) = 0$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$. Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. Par définition,

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 1 - \left[\frac{2}{\pi}\arctan(t)\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}(\arctan(1) - \arctan(0)) = 1 - \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4}$$

donc $\boxed{P(X \geqslant 1) = \frac{1}{2}}$.

Comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, $\boxed{P(X < -2) = 0}$.

3. a. Par définition, pour tout réel a, $F_X(a) = P(X \leqslant a)$ donc, comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, $\boxed{\text{pour tout } a < 0,\ F_X(a) = 0}$.

b. Soit un réel $a \geqslant 0$. Alors, par linéarité de l'intégrale et d'après la question **1.a.**,

$$F_X(a) = P(X \leqslant a) = \int_0^a \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\arctan(a).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } a \geqslant 0,\ F_X(a) = \frac{2}{\pi}\arctan(a)}$.

4. a. Remarque : le changement de variable proposé par l'énoncé est tout à fait inutile. En effet,

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^A \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{1+t^2>0}{=} \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^A = \frac{1}{2}\left[\ln(1+A^2) - \ln(1)\right]$$

soit $\boxed{\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+A^2)}$.

Si on souhaite utiliser le changement de variable donné par l'énoncé, on pose $u = 1+t^2$ de sorte que $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$. De plus, si $t = 0$, $u = 1$ et si $t = A$ alors $u = 1 + A^2$ donc

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{1+t^2} \times t\mathrm{d}t = \int_1^{1+A^2} \frac{1}{u} \times \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(u)\right]_1^{1+A^2} = \frac{1}{2}\ln(1+A^2).$$

b. On en déduit que, pour tout $A \geqslant 0$,

$$\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{2}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\ln(1+A^2).$$

Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} 1 + A^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln(1+A^2) = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = +\infty$ donc on conclut que l'intégrale $\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$.

Remarque. On pouvait aussi utiliser le fait que, au voisinage de $+\infty$, $tf(t) \sim \frac{2}{\pi}\frac{t}{t^2} \sim \frac{2}{\pi}\frac{1}{t}$. Or, l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est divergente donc, par le théorème sur les fonctions équivalentes, $\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$.

c. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;0[$, X admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge. On déduit donc de la question précédente que $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance}}$.

5. a. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, pour tout réel $a>0$, $X \geqslant \dfrac{1}{a}$ si et seulement si $\dfrac{1}{X} \leqslant a$ i.e si et seulement si $Y \leqslant a$. Ainsi, $\{Y \leqslant a\} = \left\{X \geqslant \dfrac{1}{a}\right\}$ donc $\boxed{P(Y \leqslant a) = P\left(X \geqslant \dfrac{1}{a}\right)}$.

Ainsi, pour tout réel $a>0$, $F_Y(a) = P\left(X \geqslant \dfrac{1}{a}\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{1}{a}\right)$ et, comme X est une variable aléatoire à densité, $F_Y(a) = 1 - P\left(X \leqslant \dfrac{1}{a}\right)$. Ainsi, $\boxed{F_Y(a) = 1 - F_X\left(\dfrac{1}{a}\right)}$.

b. Soit $a>0$. On déduit des questions **3.b.** et **5.a.** que

$$F_Y(a) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Or, $\arctan(a) + \arctan\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\arctan\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(a)$. Ainsi,

$$F_Y(a) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right) = 1 - 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(a) = \frac{2}{\pi}\arctan(a) = F_X(a).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } a>0,\ F_Y(a) = F_X(a)}$.

c. Pour tout réel a, $F_Y(a) = F_X(a)$ donc X et Y ont la même fonction de répartition et ainsi $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont la même loi}}$.