⧫ Révisions – Avril 2024 (suite)

Probabilités (2011)

Pierre emmène sa fille Marie au parc d'attractions et chaque évènement de leur journée est prétexte à un exercice de probabilités.

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1) Le nombre de visiteurs dans le parc

On suppose que le nombre N de visiteurs du parc pendant un jour donné est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 4000.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs par jour.

2. Le parc dispose de 4 entrées numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur choisit une entrée de manière aléatoire et sans tenir compte du choix des autres visiteurs.
On note X le nombre de visiteurs par jour entrant par l'entrée n°1.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Soit k un entier naturel.
Montrer que la loi de X sachant $N = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

c. Soit n un entier naturel.
Montrer que

$$\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k)\mathbf{P}_{(N=k)}(X = n)$$

et en déduire que

$$\mathbf{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-4000}\frac{1000^n}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{3000^j}{j!}.$$

d. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 1000.

2) Attente à l'entrée du parc

Le temps d'attente T à la caisse exprimé en minutes est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Quel est le temps d'attente moyen en caisse ?

2. Quelle est la probabilité d'attendre moins de 10 minutes ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 6 minutes ?

4. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes si on a déjà attendu 4 minutes ?

3) Au tir aux fléchettes

On considère deux réels strictement positifs A et s tels que $s < A$ et un entier naturel non nul b tel que $bs < A$.

Sur un panneau de bois de surface A m^2, sont accrochés b ballons assimilés à des disques de surface s m^2.

Le jeu consiste à crever des ballons avec des fléchettes.

1. Pierre lance trois fléchettes, les ballons crevés sont systématiquement remplacés.

Nous supposons que Pierre ne rate jamais le panneau de bois. Sa probabilité de crever un ballon est alors égale à la surface couverte par les ballons divisée par la surface du panneau de bois.

- **a.** Calculer la probabilité p que Pierre crève un ballon avec une fléchette.
- **b.** On note C la variable aléatoire égale au nombre de ballons crevés par Pierre après les trois lancers

  Reconnaître la loi de C.
- **c.** Pierre gagne s'il crève au moins deux ballons.

  Calculer le probabilité que Pierre gagne.

2. Dans un deuxième temps, Marie joue et, étant plus maladroite que son père, elle atteint le panneau de bois avec une probabilité $\beta \in [0\,;1]$.

Le nombre de ballons accrochés au panneau est toujours égal à b.

- **a.** Calculer la probabilité q que Marie crève un ballon avec une fléchette.
- **b.** On désigne par M le nombre de lancers nécessaires pour que Marie crève un ballon.

  Reconnaître la loi de M.
- **c.** Marie gagne si elle crève un ballon en moins de dix lancers.

  Calculer la probabilité que Marie gagne.

4) Au lancer de balles

Le principe du jeu est de lancer une balle dans des trous de plus en plus éloignés et le jeu s'arrête au premier échec.

Le premier lancer est réussi de façon certaine.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, si les $n-1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ème}}$ lancer est $\dfrac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul i, on note S_i l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi ».

On désigne par Z la variable aléatoire égale au numéro du dernier lancer réussi.

1. Déterminer les valeurs prises par Z.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'évènement « $Z = n$ » en fonction des évènements S_1, S_2, ..., S_n, S_{n+1} (ou leurs contraires) et en déduire que $\mathbf{P}(Z = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = n) = 1$.

4. Calculer l'espérance de Z.

On pourra commencer par calculer $\mathbf{E}(Z+1)$.

5. Calculer la variance de Z.

On pourra commencer par calculer $\mathbf{E}((Z+1)(Z-1))$.

Solution.

1) Le nombre de visiteurs dans le parc

1. Par théorème, $\mathbf{E}(X) = 4000$ donc $\boxed{\text{le nombre moyen de visiteurs par jour est } 4000}$.

2. a. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b. Supposons que l'évènement $\{N = k\}$ est réalisé. Cela signifie qu'il y a k visiteurs dans la journée. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ choisit l'entrée n°1 et 0 sinon. D'après l'énoncé, X_1, X_2, ..., X_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

Or, $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ donc $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } k \text{ et } \frac{1}{4}}$.

c. La famille $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènement donc, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k)\mathbf{P}_{(N=k)}(X = n).$$

De plus, si $k < n$ alors $\mathbf{P}_{(N=k)}(X = n) = 0$ puisque pour qu'il y a n visiteurs qui empruntent l'entrée n°1, il faut qu'il y ait au moins n visiteurs dans le parc. Dès lors,

$$\boxed{\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k)\mathbf{P}_{(N=k)}(X = n)}.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $k \geqslant$,

$$\mathbf{P}_{(N=k)}(X = n) = \binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4000^k}{k!}\mathrm{e}^{-4000}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4000^k}{k!}\mathrm{e}^{-4000} \times \frac{k!}{n!(k-n)!} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{3^{k-n}}{4^{k-n}} \\
&= \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-4000}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4000^k \times 3^{k-n}}{4^k} \times \frac{1}{(k-n)!} \\
&= \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-4000}\sum_{k=n}^{+\infty} 1000^k \times 3^{k-n} \times \frac{1}{(k-n)!} \\
&\underset{j=k-n}{=} \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-4000}\sum_{j=0}^{+\infty} 1000^{j+n} \times 3^j \times \frac{1}{j!} \\
&= \frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-4000}\sum_{j=0}^{+\infty} 1000^j \times 1000^n \times 3^j \times \frac{1}{j!}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{\mathbf{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-4000}\frac{1000^n}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{3000^j}{j!}}.$$

d. On reconnaît la somme d'une série exponentielle donc

$$\mathbf{P}(X=n)=\mathrm{e}^{-4000}\frac{1000^n}{n!}\mathrm{e}^{3000}=\frac{1000^n}{n!}\mathrm{e}^{-1000}$$

donc $\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } 1000}$.

2) Attente à l'entrée du parc

1. Par théorème, $\mathbf{E}(T)=\dfrac{1}{0{,}2}=5$ donc $\boxed{\text{le temps d'attente moyen est 5 minutes}}$.

2. La probabilité d'attendre moins de 10 minutes est

$$\mathbf{P}(T\leqslant 10)=\int_0^{10}0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{10}=-\mathrm{e}^{-2}-(-\mathrm{e}^0)$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T\leqslant 10)=1-\mathrm{e}^{-2}.}$

3. La probabilité d'attendre plus de 6 minutes est

$$\mathbf{P}(T>6)=1-\mathbf{P}(T\leqslant 6)=1-\int_0^{6}0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t=1-\left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{6}=1-\left(-\mathrm{e}^{-1{,}2}-(-\mathrm{e}^0)\right)$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T>6)=\mathrm{e}^{-1{,}2}.}$

4. La probabilité d'attendre plus de 10 minutes sachant qu'on a déjà attendu 4 minutes est

$$\mathbf{P}_{(T>4)}(T>10)=\frac{\mathbf{P}(\{T>10\}\cap\{T>4\})}{\mathbf{P}(T>4)}=\frac{\mathbf{P}(T>10)}{\mathbf{P}(T>4)}$$

car $\{T>10\}\subset\{T>4\}$.
Or, $\mathbf{P}(T>10)=1-\mathbf{P}(x\leqslant 10)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{-2}$ et

$$\mathbf{P}(T>4)=1-\mathbf{P}(T\leqslant 4)=1-\int_0^{4}0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t=1-\left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{4}=1-\left(-\mathrm{e}^{-0{,}8}-(-\mathrm{e}^0)\right)=\mathrm{e}^{-0{,}8}$$

donc

$$\mathbf{P}_{(T>4)}(T>10)=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-0{,}8}}=\mathrm{e}^{-2+0{,}8}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}_{(T>4)}(T>10)=\mathrm{e}^{-1.2}}$.

3) Au tir aux fléchettes

1. a. La surface recouverte par les ballons est bs donc, d'après l'énoncé, $\boxed{p=\dfrac{bs}{A}}$

b. Si on note, pour tout $i\in\{1,2,3\}$, X_i la variable aléatoire de Bernoulli ayant comme succès « Pierre crève un ballon au $i^{\text{ème}}$ tir » alors X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et de même paramètre p.

Ainsi, comme $C=X_1+X_2+X_3$, $\boxed{C \text{ suit une loi binomiale de paramètres 3 et } p=\dfrac{bs}{A}}$.

c. La probabilité que Pierre gagne est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C\geqslant 2)=\mathbf{P}(C=2)+\mathbf{P}(C=3)&=\binom{3}{2}p^2(1-p)+\binom{3}{3}p^3\\&=3p^2(1-p)+p^3=p^2(3-3p+p)=p^2(3-2p)\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(C\geqslant 2)=\dfrac{b^2s^2}{A^2}\left(3-\dfrac{2bs}{A}\right)}$.

2. **a.** Notons A l'évènement « Marie atteint la cible » et B l'évènement « Marie crève un ballon ». Alors, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = \beta \times p + (1-\beta) \times 0 = \beta p$$

soit $\boxed{q = \dfrac{bs\beta}{A}}$.

b. Les tirs successifs de Marie constitue un schéma de Bernoulli de paramètre q en prenant comme succès B. Ainsi, comme M correspond au rang du premier succès, $\boxed{M \text{ suit une loi géométrique de paramètre } q}$.

c. La probabilité que Marie gagne est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M \leqslant 10) &= \sum_{k=1}^{10} (1-q)^{k-1} q = q \sum_{k=1}^{10} (1-q)^{k-1} \underset{j=k-1}{=} q \sum_{j=0}^{9} (1-q)^j \\ &= q \frac{1-(1-q)^{10}}{1-(1-q)} = q \frac{1-(1-q)^{10}}{q}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(M \leqslant 10) = 1 - \left(1 - \dfrac{bs\beta}{A}\right)^{10}}$.

4) Au lancer de balles

1. La variable Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2. L'évènement $\{Z = n\}$ signifie que les n premiers lancers sont réussis et que les $(n+1)^{\text{ème}}$ est raté donc $\boxed{\{Z = n\} = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}}$.
 Grâce à la formule de probabilités composées, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) &= \mathbf{P}(S_1)\mathbf{P}(S_2 \mid S_1)\mathbf{P}(S_3 \mid S_1 \cap S_3) \cdots \mathbf{P}(\overline{S_{n+1}} \mid S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

 donc $\boxed{\mathbf{P}(Z = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, en reconnaissant une somme téléscopique,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=2}^{N+1} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1\end{aligned}$$

 donc $\boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(Z = n) = 1}$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(n+1)\mathbf{P}(Z=n) &= \sum_{n=1}^{N}(n+1)\times\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n(n+1)}{(n-1)!\times n(n+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e\end{aligned}$$

donc, par le théorème de transfert, $Z+1$ admet une espérance et $\mathbf{E}(Z+1)=e$. Comme $Z=(Z+1)-1$, on en déduit, par linéarité de l'espérance, que Z admet une espérance et que $\boxed{\mathbf{E}(Z)=e-1}$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(n+1)(n-1)\mathbf{P}(Z=n) &= \sum_{n=2}^{N}(n+1)(n-1)\times\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{N}\frac{(n-1)n(n+1)}{(n-2)!\times(n-1)n(n+1)}\\ &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!} \underset{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{k!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e\end{aligned}$$

donc, par le théorème de transfert, $(Z+1)(Z-1)$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}((Z+1)(Z-1)) = e.$$

Comme $Z^2=(Z+1)(Z-1)+1$, on en déduit, par linéarité de l'espérance, que Z^2 admet une espérance et que $\mathbf{E}(Z^2)=e+1$. Dès lors, par la formule de König-Huygens, Z admet une variance et

$$\mathbf{V}(Z)=\mathbf{E}(Z^2)-\mathbf{E}(Z)^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-(e^2-2e+1)$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(Z)=3e-e^2}$.