

◆ Révisions – Avril 2024 (suite)

Probabilités (2011)

Pierre emmène sa fille Marie au parc d'attractions et chaque évènement de leur journée est prétexte à un exercice de probabilités.

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1) Le nombre de visiteurs dans le parc

On suppose que le nombre N de visiteurs du parc pendant un jour donné est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 4000.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs par jour.
2. Le parc dispose de 4 entrées numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur choisit une entrée de manière aléatoire et sans tenir compte du choix des autres visiteurs.

On note X le nombre de visiteurs par jour entrant par l'entrée n°1.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Soit k un entier naturel.

Montrer que la loi de X sachant $N = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

c. Soit n un entier naturel.

Montrer que

$$\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \mathbf{P}_{(N=k)}(X = n)$$

et en déduire que

$$\mathbf{P}(X = n) = e^{-4000} \frac{1000^n}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{3000^j}{j!}.$$

d. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 1000.

2) Attente à l'entrée du parc

Le temps d'attente T à la caisse exprimé en minutes est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Quel est le temps d'attente moyen en caisse ?
2. Quelle est la probabilité d'attendre moins de 10 minutes ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 6 minutes ?
4. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes si on a déjà attendu 4 minutes ?

3) Au tir aux fléchettes

On considère deux réels strictement positifs A et s tels que $s < A$ et un entier naturel non nul b tel que $bs < A$.

Sur un panneau de bois de surface A m², sont accrochés b ballons assimilés à des disques de surface s m².

Le jeu consiste à crever des ballons avec des fléchettes.

1. Pierre lance trois fléchettes, les ballons crevés sont systématiquement remplacés.

Nous supposons que Pierre ne rate jamais le panneau de bois. Sa probabilité de crever un ballon est alors égale à la surface couverte par les ballons divisée par la surface du panneau de bois.

- a. Calculer la probabilité p que Pierre crève un ballon avec une fléchette.

- b. On note C la variable aléatoire égale au nombre de ballons crevés par Pierre après les trois lancers

Reconnaitre la loi de C .

- c. Pierre gagne s'il crève au moins deux ballons.

Calculer la probabilité que Pierre gagne.

2. Dans un deuxième temps, Marie joue et, étant plus maladroite que son père, elle atteint le panneau de bois avec une probabilité $\beta \in [0; 1]$.

Le nombre de ballons accrochés au panneau est toujours égal à b .

- a. Calculer la probabilité q que Marie crève un ballon avec une fléchette.

- b. On désigne par M le nombre de lancers nécessaires pour que Marie crève un ballon.

Reconnaitre la loi de M .

- c. Marie gagne si elle crève un ballon en moins de dix lancers.

Calculer la probabilité que Marie gagne.

4) Au lancer de balles

Le principe du jeu est de lancer une balle dans des trous de plus en plus éloignés et le jeu s'arrête au premier échec.

Le premier lancer est réussi de façon certaine.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, si les $n - 1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ème}}$ lancer est $\frac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul i , on note S_i l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi ».

On désigne par Z la variable aléatoire égale au numéro du dernier lancer réussi.

1. Déterminer les valeurs prises par Z .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'évènement « $Z = n$ » en fonction des évènements $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$ (ou leurs contraires) et en déduire que $\mathbf{P}(Z = n) = \frac{n}{(n+1)!}$.

3. Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = n) = 1$.

4. Calculer l'espérance de Z .

On pourra commencer par calculer $\mathbf{E}(Z + 1)$.

5. Calculer la variance de Z .

On pourra commencer par calculer $\mathbf{E}((Z + 1)(Z - 1))$.