⧫ Révisions – Avril 2024

Algèbre (2020)

Si a est un nombre réel, on note $M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$. On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_a.

Par ailleurs, on rappelle que $(x\,;y)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, la nombre réel $\|(x\,;y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ est la **norme** du vecteur $(x\,;y)$.

1. Exemples.

a. Calculer M_0, $M_{\frac{\pi}{2}}$ et M_π. (Autrement dit, calculer M_a dans les cas $a=0$, $a=\frac{\pi}{2}$ et $a=\pi$.)

b. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Donner un réel $a \in [0\,;2\pi[$ tel que $A = M_a$.

2. Premières propriétés. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Calculer le déterminant de M_a. L'application f_a est-elle bijective ? Que dire du noyau de f_a ?

b. Calculer $f_a((1\,;0))$ et $f_a((0\,;1))$. En déduire $\|f_a((1\,;0))\|$ et $\|f_a((0\,;1))\|$.

c. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que le vecteur $f_a((x\,;y))$ et le vecteur $(x\,;y)$ ont la même norme.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f_a et $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé.
Montrer que $\|f_a(u)\| = |\lambda| \times \|u\|$. En déduire que λ vaut soit 1, soit une autre valeur réelle que l'on précisera.

3. On s'intéresse aux valeurs propres **complexes** de M_a.

a. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Trouver des coefficients α et β **réels**, que l'on exprimera en fonction de a, et vérifiant, pour tout nombre complexe z :

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - 2\alpha z + \beta.$$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant de $M_a - \lambda I_2$ vaut $(\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a})(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})$.

c. Pour quelles valeurs de λ, la matrice $M_a - \lambda I_2$ est-elle *non* inversible ?

d. Expliquer pourquoi les valeurs propres (complexes) de M_a sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

4. Application. Existe-t-il un réel a et une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_a est la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$? *Indication : chercher d'abord les valeurs propres de cette matrice. Sont-elles de la forme* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ *et* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$ *?*

5. Si a et b sont deux nombres réels, montrer que $M_{a+b} = M_a M_b$.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un réel $a \in]0\,;2\pi[$ tel que $M_a^n = I_2$. On exprimera un tel réel a en fonction de n et de π.

Solution.

1. **a.** Par définition, $M_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_0 = I_2}$, $M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ et $M_\pi = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{M_\pi = -I_2}$.

   b. On cherche un réel a tel que $\cos(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, $a = \frac{\pi}{4}$ convient donc $\boxed{A = M_{\frac{\pi}{4}}}$.

2. **a.** $\det(M_a) = \cos^2(a) - (-\sin^2(a)) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$. Comme $\det(M_a) \neq 0$, f_a est bijective. Elle est en particulier injective donc $\boxed{\ker f_a = \{(0\,;0)\}}$.

   b. $f_a((1\,;0)) = (\cos(a)\,;\sin(a))$ et $f_a((0\,;1)) = (-\sin(a)\,;\cos(a))$. On en déduit que $\|f_a((1\,;0))\| = \sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \sqrt{1} = 1$ et $\|f_a((0\,;1))\| = \sqrt{\sin^2(a) + \cos^2(a)} = \sqrt{1} = 1$.

   c. Par définition,

$$f_a((x\,;y)) = (\cos(a)x - \sin(a)y\,;\sin(a)x + \cos(a)y)$$

   donc

$$\begin{aligned}
&\|f_a(x)\| = \sqrt{(\cos(a)x - \sin(a)y)^2 + (\sin(a)x + \cos(a)y)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2(a)x^2 - 2\cos(a)\sin(a)xy + \sin^2(a)y^2 + \sin^2(a)x^2 + 2\sin(a)\cos(a)xy + \cos^2(a)y^2} \\
&= \sqrt{(\cos^2(a) + \sin^2(a))(x^2 + y^2)} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

   Or, $\|(x\,;y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $\boxed{\|f_a((x\,;y))\| = \|(x\,;y)\|}$.

   d. Par définition, $f_a(u) = \lambda u$ donc $\boxed{\|f_a(u)\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|}$. Or, d'après la question précédente, $\|f_a(u)\| = \|u\|$ donc $\|u\| = |\lambda| \times \|u\|$. De plus, $u \neq 0$ donc $\|u\| \neq 0$ et ainsi, en divisant par $\|u\|$, on conclut que $|\lambda| = 1$ donc $\boxed{\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1}$.

3. **a.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = z^2 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$$

   Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$ et, par le formule d'Euler, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = 2\cos(a)$ donc

$$\left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = z^2 - 2\cos(a)z + 1.$$

   Ainsi, $\boxed{\alpha = \cos(a) \text{ et } \beta = 1}$.

   b. Par définition,

$$\begin{aligned}
\det(M_a - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} \cos(a) - \lambda & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) - \lambda \end{vmatrix} = (\cos(a) - \lambda)^2 + \sin^2(a) \\
&= \cos^2(a) - 2\cos(a)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(a) \\
&= \lambda^2 - 2\cos(a)\lambda + 1
\end{aligned}$$

   donc, d'après la question précédente, $\boxed{\det(M_a - \lambda I_2) = \left(\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right)}$.

c. La matrice $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\begin{aligned}\det(M_a - \lambda I_2) = 0 &\iff \left(\lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\right)\left(\lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\right) = 0 \iff \lambda - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} = 0 \text{ ou } \lambda - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = 0 \\ &\iff \lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \text{ ou } \lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}.\end{aligned}$$

Ainsi, $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ ou $\lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

d. Par définition, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $M_a - \lambda I_2$ n'est pas injective, comme il s'agit d'une matrice carré, si et seulement si $M_a - \lambda I_2$ n'est pas inversible. Ainsi, par la question précédente, les valeurs propres complexes de M_a sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$.

4. Posons $N = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Comme N est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, c'est-à-dire 5 et -4. Or, $|5| = 5$ et, pour tout réel a, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}| = 1$ donc, quelle que soit la valeur de a, 5 n'est pas valeur propre de M_a et donc 5 n'est pas valeur propre de f_a. Ainsi, il n'existe pas de réel a et de base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tels que la matrice de f_a dans $\mathcal{B}$ est N.

5. Par les formules d'addition,

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\left(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\right) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{M_a M_b = M_{a+b}}$.

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_a^n = M_{na}$. Comme $M_a^0 = I_2$ et $M_{0a} = M_0 = I_2$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang $n = k$. Alors, d'après la question précédente,

$$M_a^{k+1} = M_a^k M_a = M_{ka} M_a = M_{ka+a} = M_{(k+1)a}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = k+1$.
Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_a^n = M_{na}$.
Dès lors, comme cos et sin sont 2π-périodiques, $M_{2\pi} = M_0 = I_2$ donc $M_{\frac{2\pi}{n}}^n = M_{\frac{2\pi}{n} \times n} = M_{2\pi} = I_2$. Comme $\frac{2\pi}{n} \in \left]0\,;2\pi\right[$, on conclut que $\boxed{a = \frac{2\pi}{n} \text{ convient}}$.

Algèbre (2023)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 et -2 sont valeurs propres de A.

2. Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

3. Donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.

4. Calculer explicitement P^{-1}.

5. Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, D, P^{-1} et n. Justifier en rédigeant une récurrence.

6. Calculer explicitement les quatre coefficients de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On se donne à présent la suite (u_n) définies par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

7. Calculer u_2 et u_3.

8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs AX_n et X_{n+1}.

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A, X_0 et n.

10. Donner enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. Posons $M = A - I_2$. Alors, $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\det(M) = (-2) \times (-1) - 2 \times 1 = 0$. Ainsi, M n'est pas inversible donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A}$.

Posons $N = A - (-2)I_2$. Alors, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\det(N) = 1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$. Ainsi, N n'est pas inversible donc $\boxed{-2 \text{ est valeur propre de } A}$.

2. On cherche un vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AV = V$ ce qui équivaut à $MV = 0_2$. Or,

$$MV = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi, le vecteur $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une vecteur propre associé à la valeur propre } 1}$.

On cherche un vecteur $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AW = -2W$ ce qui équivaut à $NW = 0_2$. Or,

$$NW = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y.$$

Ainsi, le vecteur $\boxed{W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une vecteur propre associé à la valeur propre } -2}$.

3. Par propriété, $D = P^{-1}AP$ avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

4. Comme P est une matrice 2×2 et $\det(P) = 1\times 1 - 1\times(-2) = 3$, $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

5. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Comme $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité est vraie au rang $n = k$ c'est-à-dire que $A^k = PD^kP^{-1}$.
Alors, comme $D = P^{-1}AP$, $A = PDP^{-1}$ donc, par associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kI_2DP^{-1} \\ &= PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = k+1$.
Par le principe de récurrence, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$. On déduit alors des questions précédentes que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 2-2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 2+(-2)^n \end{pmatrix}}.$$

7. $u_2 = -u_1 + 2u_0 = -1 + 4$ donc $\boxed{u_2 = 3}$ et $u_3 = -u_2 + 2u_1 = -3 + 2$ donc $\boxed{u_3 = -1}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$AX_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi, les deux vecteurs $\boxed{AX_n \text{ et } X_{n+1} \text{ sont égaux}}$.

9. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
Comme $A^0 = I_2$, $A^0X_0 = X_0$ donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité est vraie au rang $n = k$ c'est-à-dire que $X_k = A^kX_0$.
Alors, d'après la question précédente,

$$X_{k+1} = AX_k = A(A^kX_0) = (AA^k)X_0 = A^{k+1}X_0$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = k+1$.
Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n & 2-2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 2+(-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-2)^n+4-4(-2)^n \\ 1-(-2)^n+4+2(-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5-2(-2)^n \\ 5+(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\boxed{u_n = \dfrac{5+(-2)^n}{3}}$.

Remarque 1.

1. On vérifie que ce résultat est bien cohérent avec les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3 déterminées précédemment : $\dfrac{5+(-2)^0}{3} = \dfrac{6}{3} = 2 = u_0$, $\dfrac{5+(-2)^1}{3} = \dfrac{2}{3} = 1 = u_0$, $\dfrac{5+(-2)^2}{3} = \dfrac{9}{3} = 3 = u_2$ et $\dfrac{5+(-2)^3}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1 = u_3$.
2. L'égalité montrée dans la question 10 donne également que $u_{n+1} = \dfrac{5-2(-2)^n}{3}$ ce qui est cohérent car $\dfrac{5-2(-2)^n}{3} = \dfrac{5+(-2)(-2)^n}{3} = \dfrac{5+(-2)^{n+1}}{3}$.

Analyse (2023)

Dans cet exercice, on considère la fonction $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \geqslant 1$, par la relation :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On rappelle que la fonction exponentille $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et positive.
   Pour tout $x \geqslant 0$, montrer alors que l'on a les deux inégalités :
   $$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$
   Ces inégalités pourront être utilisées dans la suite de l'exercice.
2. Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

   On **admet** que la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc admet une primitive sur $[1\,;+\infty[$. On note U une primitive de u dans la suite de l'exercice.
   On ne cherchera pas à calculer U.
3. Notons g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par la relation $g(x) = U(2x)$.
   Montrer que g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et prouver que, pour tout $x \geqslant 1$, on a :
   $$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$
4. Montrer que f est dérivable et que l'on a, pour tout $x \geqslant 1$,
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
5. Donner le sens de variation de la fonction f.
   On pourra utiliser l'une des deux inégalités de la question 1.

Solution.

1. Soit $x \geqslant 0$. Alors, $x + x \geqslant 0 + x$ c'est-à-dire $2x \geqslant x$ donc, comme $-1 < 0$, $-2x \leqslant -x$. Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $\boxed{0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}$.
   Comme exp est positive sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $-\mathrm{e}^{-2x} \leqslant 0$ et, ainsi, $\boxed{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

2. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Alors, pour tout $t \in [x\,;2x]$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $t > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0$. De plus, comme $x > 0$, $2x > x$ donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f(x) \geqslant 0}$.

3. Par définition, la fonction U est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et $U' = u$. De plus, $x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $[1\,;+\infty]$ et, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $2x \in [1\,;+\infty[$ donc, par composition, g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = 2U'(2x) = 2u(2x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}}.$$

4. Comme U est une primitive de u sur $[1\,;+\infty[$, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \int_x^{2x} u(t)\,\mathrm{d}t = U(2x) - U(x) = g(x) - U(x).$$

Or, les deux fonctions U et g sont dérivables sur $[1\,;+\infty[$ donc, par différence, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = g'(x) - U'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - u(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}}.$$

5. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. D'après le résultat de la question **1.**, $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$ et, comme $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$ donc $\underline{f \text{ est décroissante sur } [1\,;+\infty[}$.

Analyse (2020)

On rappelle le résultat suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction u définie et dérivable sur I. Si on a $u'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors u est constante sur I.

On rappelle que la fonction arctangente, notée arctan, est la bijection réciproque de la fonction tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$. C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a la relation pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Rappeler la valeur de $\arctan(0)$ et de $\arctan(1)$.
2. Rappeler la valeur de la limite de arctan en $+\infty$.
3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer la dérivée de la fonction f.

   Attention, on rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables, la dérivée de leur composée est donnée par la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.

4. Calculer, pour tout x non nul, $\arctan'(x)+f'(x)$.
5. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$. *On précisera soigneusement les théorèmes employés.*
6. Si x est strictement négatif, donner la valeur de $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. *On rappelle que* arctan *est impaire.*
7. Le résultat rappelé au début de l'énonce reste-t-il vrai si I n'est pas un intervalle ?
8. Calculer la limite de $\dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}$ lorsque x tend vers 0.
9. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1$.
10. Donner alors un équivalent **très simple** de la suite (u_n), de terme général $u_n=\frac{\pi}{2}-\arctan(n)$.

Solution.

1. $\arctan(0)=0$ et $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$.
3. Pour tout $x\neq 0$,
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\arctan'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
donc $\boxed{f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}}$.
4. Pour tout x non nul,
$$\arctan'(x)+f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0.$$
5. Posons $h:x\longmapsto\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, pour tout $x\neq 0$, $h'(x)=0$ d'après la question précédente. Comme $]0\,;+\infty[$ est une intervalle, on en déduit que h est constant sur I. De plus, $h(1)=2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}$ donc, pour tout réel $x>0$, $h(x)=\frac{\pi}{2}$. On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}}$.
6. Soit un réel $x<0$. Alors, $-x>0$ donc, d'après la question précédente, $\arctan(-x)+\arctan\left(\frac{1}{-x}\right)=\frac{\pi}{2}$. Or, par imparité de la fonction arctan,
$$\arctan(-x)+\arctan\left(\frac{1}{-x}\right)=-\arctan(x)+\arctan\left(-\frac{1}{x}\right)=-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
donc $-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ et ainsi $\boxed{\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}}$.
7. La dérivée de la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais h n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ car $h(x)=-\frac{\pi}{2}$ pour tout $x<0$ et $h(x)=\frac{\pi}{2}$ pour tout $x>0$. Ainsi, le théorème rappelé au début de l'énoncé n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle.
8. Comme la fonction arctan est dérivable en 0,
$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}=\arctan'(0)=\frac{1}{1+0^2}=1.$$

9. Comme $\arctan(0) = 0$, la limite précédente se réécrit $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$. Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\arctan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$ c'est-à-dire $\boxed{\lim_{x \to +\infty} x \arctan(\frac{1}{x}) = 1}$.

10. Pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ d'après la question **5.**. Or, d'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} n \arctan(\frac{1}{n}) = 1$ donc $\arctan(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. On conclut donc que $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.

Probabilités (2020)

Si l'on dispose de k jetons que l'on place dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie **1.** est indépendante des suivantes.

1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes a et b.

Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a, et une chance sur deux d'être dans l'urne b. Il en est de même pour chacun des quatre autre jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X, l'évènement « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'évènement « L'urne b est vide ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement « L'un des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas général de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de **trois** urnes appelées a, b et c.

De même que précédemment, chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi, chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, un chance sur trois d'être dans l'urne b, et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Soit $i \in [\![1, 5]\!]$ et E_i l'évènement « Le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'évènement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'évènement E_i.
2. Soit V_a l'évènement « L'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des fonctions E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5.
3. En déduire que $P(V_a) = \dfrac{2^5}{3^5}$.

   Par symétrie du problème, on pourra admette que la probabilité $P(V_b)$ que b soit vide et que la probabilité $P(V_c)$ que c soit vide ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N.

3) Calcul de $P(N=2)$ et de $P(N=3)$

1. Que signifie, en français, l'évènement $(N=3)$? Donner sa probabilité. *On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.*
2. Que signifie, en français, l'évènement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.
On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $(N=2)$. On exprimera dans un premier temps l'évènement $(N=2)$ en fonction d'évènements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

4) Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N.

1. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (Z_c vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon) . Reconnaître la loi et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a, Z_b et Z_c.
2. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c.
3. Calculer alors l'espérance de N.

5) Loi de N

1. Montrer que $P(N=1)+2P(N=2)=\dfrac{2^5}{3^4}$.
2. En déduire la valeur de $P(N=1)$.
3. Donner enfin le loi de la variable aléatoire N. On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

Solution.

1) Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

1. Si on note, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si on place le jeton i dans l'urne a et 0 sinon alors X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. De plus, les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 sont indépendantes et, par définition, $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ donc $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale } \mathscr{B}(5,\frac{1}{2})}$.
2. L'évènement « L'urne a est vide » est l'évènement $\{X=0\}$ et l'évènement « L'urne b est vide » est l'évènement $\{X=5\}$.
3. L'évènement « L'une des deux urnes est vide » est l'évènement $\{X=0\} \cup \{X=5\}$ et cette union est disjointe donc la probabilité de cet évènement est

$$\begin{aligned}P(X=0)+P(X=5) &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-0}+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-5}\\ &= \frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}=\frac{2}{2^5}=\frac{1}{2^4}\end{aligned}$$

soit $\boxed{P(X=0)+P(X=5)=\dfrac{1}{16}}$.

2) Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Par hypothèse, $P(\overline{E_i}) = \frac{1}{3}$ donc $P(E_i) = 1 - P(\overline{E_i}) = \frac{2}{3}$.

2. V_a est réalisé si aucun jeton n'est dans l'urne a donc $V_a = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$.

3. Par hypothèse, les évènements E_i sont deux à deux indépendants dons

$$P(V_a) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)P(E_5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

soit $\boxed{P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}}$.

3) Calcul de $P(N = 2)$ et de $P(N = 3)$

1. $(N = 3)$ signifie que les 3 urnes sont vides ce qui est un évènement impossible puisque chaque jeton est placé dans une urne. Ainsi, $\boxed{P(N = 3) = 0}$.

2. L'évènement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$ signifie que les urnes b et c sont vides mais pas l'urne a, c'est-à-dire que tous les jetons ont été placés dans l'urne a. On a donc $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4} \cap \overline{E_5}$ et, par indépendance, on en déduit que $\boxed{P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}}$.

3. $(N = 2)$ signifie que deux des trois urnes sont vides donc

$$(N = 2) = (\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)) \cup (V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c) \cup (V_a \cap V_b \cap \overline{V_c}).$$

Il s'agit d'une union de trois évènements incompatibles donc $P(N = 2) = 3 \times \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3^4}$ c'est-à-dire $\boxed{P(N = 2) = \frac{1}{81}}$.

4) Espérance de N

1. Par définition, Z_a, Z_b et Z_c suivent des lois de Bernoulli de paramètres $P(V_a) = P(V_b) = P(V_c) = \frac{2^5}{3^5}$. On a donc $E(Z_a) = E(Z_b) = E(Z_c) = \frac{2^5}{3^5}$.

2. Par définition, $N = Z_a + Z_b + Z_c$.

3. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $E(N) = E(Z_a) + E(Z_b) + E(Z_c) = 3 \times \frac{2^5}{3^5} = \frac{2^5}{3^4}$ c'est-à-dire $E(N) = \frac{32}{81}$.

5) Loi de N

1. Par définition, l'espérance de N est $E(N) = \sum_{i=0}^{3} iP(N = i)$. Or, pour $i = 0$, $iP(N = i) = 0$ et, pour $i = 3$, $iP(N = i) = 0$ car $P(N = 3) = 0$. Ainsi, $E(N) = P(N = 1) + 2P(N = 2)$ et donc, par le résultat de la partie précédente, $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81}$.

2. On en déduit que $P(N = 1) = \frac{32}{81} - 2P(N = 2) = \frac{32}{81} - 2 \times \frac{1}{81} = \frac{30}{81}$ c'est-à-dire $\boxed{P(N = 1) = \frac{10}{27}}$.

3. En tenant compte du fait que $\sum_{i=0}^{3} P(N=i)=1$, on aboutit à la loi suivante :

i	0	1	2	3
$P(N=i)$	$\frac{50}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{81}$	0

Probabilités (2023)

Dans cet exercice, on fixe p et q deux réels appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

On considère la situation d'un chat domestique. Son propriétaire quitte chaque matin la maison et ne rentre que le soir. Chaque jour, à l'instant du départ de son propriétaire, le chat est confronté à un choix : ou bien rester à la maison, ou bien décider de passer la journée dehors. Les ouvertures de la maison étant toutes closes, et la porte d'entrée de la maison ne disposant par de chatière, le chat devra passer sa journée soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur de la maison. On se rend compte que, lorsque le chat choisit de rester à l'intérieur de la maison un jour donné, la probabilité qu'il choisisse de rester de nouveau à la maison le lendemain est égale à p. Lorsque le chat passe la journée dehors, la probabilité qu'il décide de reste dans la maison le lendemain vaut q.

Tout ceci se déroule sur une période de temps où les jours sont indexés par $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire qu'ils sont numérotées 1, 2, 3,... ; de façon générale, un jour possède un numéro n non nul. Ceci autorise, pour tout entier naturel n strictement positif, à considérer les évènements A_n et B_n suivants :

A_n : « le chat reste à la maison le n-ème jour »

B_n : « le chat passe la journée dehors le n-ème jour ».

Ainsi, B_n est simplement l'évènement contraire de A_n. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. On suppose qu'au premier jour le chat choisit de rester la journée dehors, ainsi $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

1. Quelle relation simple existe, pour tout entier naturel n non nul, entre a_n et b_n ?

2. On considère les égalités suivantes, dont certaines traduisent correctement l'énoncé, et d'autres non :

$$P_{A_n}(A_n)=p\ ; \qquad P_{A_{n+1}}(A_n)=p\ ; \qquad P(A_n\cap A_{n+1})=p\ ; \qquad P_{A_n}(B_{n+1})=p\ ;$$
$$P_{A_n}(A_{n+1})=p\ ; \qquad P_{A_n}(B_{n+1})=q\ ; \qquad P_{B_n}(A_{n+1})=q\ ; \qquad P_{B_n}(A_{n+1})=p.$$

Recopier sur votre copie les égalités justes, c'est-à-dire celles qui traduisent l'énoncé correctement. On ne demande pas de corriger les autres. On rappelle que la notation $P_X(Y)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'évènement Y sachant l'évènement X.

3. Donner les valeurs des $P_{B_n}(B_n)$ et de $P_{B_n}(B_{n+1})$ pour tout entier naturel n non nul.

4. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, on a la relation :

$$a_{n+1}=(p-q)a_n+q.$$

5. On note $\ell = \dfrac{q}{1+q-p}$.

a. Montrer que $1+q-p$ est non nul (et donc que le réel ℓ est bien défini).

b. Simplifier l'expression $(p-q)\ell+q$.

c. Montrer que l'on a $a_n = -\ell(p-q)^{n-1} + \ell$ pour tout entier naturel n non nul.
Indication : raisonner par récurrence.

d. Pour $n \geqslant 1$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si la chat reste à la maison le n-ème jour, et valant 0 sinon. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_n en fonction de a_n.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné que $B_n = \overline{A_n}$, $P(B_n) = 1 - P(A_n)$ donc $\boxed{b_n = 1 - a_n}$.

2. L'énoncé permet d'affirmer que $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = p \text{ et } P_{B_n}(A_{n+1}) = q}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $P_{B_n}(B_n) = 1$ et donc, comme P_{B_n} est une probabilité et $B_{n+1} = \overline{A_{n+1}}$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1})$ donc $\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - q}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements A_n et B_n forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n p + b_n q = a_n p + (1 - a_n)q \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{a_{n+1} = (p-q)a_n + q}$.

5. **a.** Par hypothèse, $q > 0$ donc $q - p > -p$ et $p < 1$ donc $-p > -1$. Par suite, $q - p > -1$ donc $1 + q - p > 0$. En particulier, $\boxed{1 + q - p \neq 0 \text{ donc } \ell \text{ est bien définie}}$.

b. On a

$$\begin{aligned} (p-q)\ell + q &= \frac{(p-q)q}{1+q-p} + q = \frac{pq - q^2 + q(1+q-p)}{1+q-p} \\ &= \frac{pq - q^2 + q + q^2 - pq}{1+q-p} = \frac{q}{1+q-p} \end{aligned}$$

donc $\boxed{(p-q)\ell + q = \ell}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H_n : « $a_n = -\ell(p-q)^{n-1} + \ell$ ».
Par hypothèse, $a_1 = 0$ et $-\ell(p-q)^{1-1} + \ell = \ell(p-q)^0 + \ell = \ell \times 1 + \ell = 0$ donc H_1 est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que H_k est vraie c'est-à-dire que $a_k - \ell(p-q)^{k-1} + \ell$. Alors, d'après les résultats des questions **4.** et **5.a.**,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (p-q)a_k + q = (p-q)\left[-\ell(p-q)^{k-1} + \ell\right] + q \\ &= -\ell(p-q)^{k+1-1} + (p-q)\ell + q = -\ell(p-q)^{k+1-1} + \ell \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.
Ainsi, par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\ell(p-q)^{n-1} + \ell}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre a_n. On a donc $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = a_n \text{ et } \mathbf{V}(X_n) = a_n(1 - a_n)}$.