

Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 4 mars 2026

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but de ce qui suit est de donner trois méthodes différentes et indépendantes pour calculer les puissances de M .

1. Première méthode

On pose $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

- a. Calculer A et A^2 .
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$.
On mettra, en particulier, en avant la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 4$.
- c. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.
 - i. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - ii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
- d. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2. Seconde méthode

- a. Montrer qu'il existe une matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = 4J - 3I_3$.
- b. Calculer J^2 puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n .
- c. On admet que la formule du binôme de Newton s'applique aux matrices qui commutent.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J.$$

- d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.
- e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .
Cette dernière écriture est-elle encore valable pour $n = 0$?

3. Troisième méthode

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .

- a. Montrer que $w = (-2, 1, 1)$ est un vecteur propre de f associé à une valeur propre que l'on précisera.
- b. Montrer que 1 est une valeur propre de f et montrer que $E_1(f) = \text{Vect}(u, v)$ où u est de la forme $u = (1, a, b)$ et v est de la forme $v = (c, 1, d)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
- c. Justifier que M est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que

$$M = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- d. Calculer P^{-1} .
- e. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne dépendant que de n .

Solution.

1. Première méthode

a. Étant donné que $M - I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 = -A$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$ ».

Initialisation. Comme $M^0 = I_3 = I_3 + 0A$, $\mathcal{P}(0)$ est vrai en prenant $u_0 = 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$. Dès lors, en remarquant que $M = I_3 + 4A$,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M = (I_3 + u_n A)(I_3 + 4A) = I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2 \\ &= I_3 + (4 + u_n)A + 4u_n(-A) = I_3 + (4 - 3u_n)A \end{aligned}$$

donc, en posant $u_{n+1} = -3u_n + 4$, il vient $M^{n+1} = I_3 + u_{n+1}A$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$. De plus, $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 4$.

c. i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -3u_n + 4 - 1 = -3u_n + 3 = -3(u_n - 1) = -3v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison -3 .

ii. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_0 \times (-3)^n$. Or, $v_0 = u_0 - 1 = -1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -(-3)^n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

donc $u_n = v_n + 1$ et, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (-3)^n$.

d. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A = \begin{pmatrix} 1 - 2(1 - (-3)^n) & 0 & -2(1 - (-3)^n) \\ 1 - (-3)^n & 0 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 1 + 1 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.$$

2. Seconde méthode

a. On peut remarque que

$$M + 3I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $M = 4J - 3I_3$ en posant $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $J^2 = J$.

Soit un entier $n \geq 1$. Alors, $J^{n+1} = J^{n-1}J^2 = J^{n-1}J = J^n$ donc la suite $(J^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante et ainsi, $J^n = J$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que les deux matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent puisque $4J \times (-3I_3) = 4 \times (-3)(J \times I_3) = 4 \times (-3)(I_3 \times J) = -3I_3 \times 4J$. Ainsi, en appliquant la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} M^n &= (4J + (-3I_3))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3^{n-k} + \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n J^0 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J^k = J$ et $I_3^{n-k} = I_3$ donc

$$M^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J + (-3)^n I_3$$

soit finalement

$$M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J.$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n$$

d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = (4 + (-3))^n - (-3)^n = 1^n - (-3)^n$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n.$$

e. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n)J$ i.e.

$$M^n = \begin{pmatrix} (-3)^n - (1 - (-3)^n) & 0 & -2(1 - (-3)^n) \\ 1 - (-3)^n & (-3)^n + (1 - (-3)^n) & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & (-3)^n + 2(1 - (-3)^n) \end{pmatrix}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que cette égalité reste vraie pour $n = 0$ car les deux termes sont alors égaux à I_3 .

3. Troisième méthode

a. Comme $M \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(w) = -3w$ donc, comme $w \neq (0, 0, 0)$,

w est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -3 .

b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -7x - 8z = x \\ 4x + y + 4z = y \\ 4x + 5z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8x - 8z = 0 \\ 4x + 4z = 0 \\ 4x + 4z = 0 \end{cases} \iff z = -x$$

Ainsi, $E_1(f) = \{(x, y, -x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On en déduit que $E_1(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ (car, par exemple, $(1, 0, 1) \in E_1(f)$) donc $1 \in \text{Sp}(f)$

et, de plus, $E_1(f) = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 0)$.

c. Comme $\dim(E_{-3}(f)) + \dim(E_1(f)) \geq 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, f est diagonalisable. De

plus, $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 2z = a & L_1 \\ y + z = b & L_2 \\ -x + z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2z = a & L_1 \\ y + z = b & L_2 \\ -z = c + a & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2(-a - c) = a \\ y - a - c = b \\ z = -a - c \end{cases} \iff \begin{cases} x = -a - 2c \\ y = a + b + c \\ z = -a - c \end{cases}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

e. Comme $M = PDP^{-1}$, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Or, D est diagonale donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-3)^n \\ 0 & 1 & (-3)^n \\ -1 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, on retrouve bien que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.$$