

Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 4 mars 2026

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but de ce qui suit est de donner trois méthodes différentes et indépendantes pour calculer les puissances de M .

1. Première méthode

On pose $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

- a. Calculer A et A^2 .
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$.
On mettra, en particulier, en avant la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 4$.
- c. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.
 - i. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - ii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
- d. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2. Seconde méthode

- a. Montrer qu'il existe une matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = 4J - 3I_3$.
- b. Calculer J^2 puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n .
- c. On admet que la formule du binôme de Newton s'applique aux matrices qui commutent.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J.$$

- d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.
- e. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .
Cette dernière écriture est-elle encore valable pour $n = 0$?

3. Troisième méthode

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M .

- a. Montrer que $w = (-2, 1, 1)$ est un vecteur propre de f associé à une valeur propre que l'on précisera.
- b. Montrer que 1 est une valeur propre de f et montrer que $E_1(f) = \text{Vect}(u, v)$ où u est de la forme $u = (1, a, b)$ et v est de la forme $v = (c, 1, d)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
- c. Justifier que M est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que

$$M = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- d. Calculer P^{-1} .
- e. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une écriture matricielle de M^n ne dépendant que de n .