Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 3 avril 2024

On considère dans tout l'exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer trois vecteurs propres u_0, u_1 et u_2 de la matrice A, en respectant les contraintes suivantes :

- u_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, et de première coordonnée 1 ;
- u_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, et de deuxième coordonnée 1 ;
- u_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et de première coordonnée 1.

b. Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2) est une base $\mathbb{R}^3$.

2. Vérifier que les trois vecteurs propres trouvés plus haut sont deux à deux orthogonaux.

3. Calculer les normes de chacun des trois vecteurs propres : $\|u_1\|$, $\|u_2\|$ et $\|u_3\|$.
On pose $e_0 = \dfrac{1}{\|u_0\|}u_0$, $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}u_1$, $e_2 = \dfrac{1}{\|u_2\|}u_2$. On note (B) la famille (e_0, e_1, e_2).

4. Montrer que (B) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (B). Donner la matrice P.

6. Donner une relation entre P et sa transposée ${}^tP$.

7. Donner alors l'inverse de P.

8. On pose désormais $D = P^{-1}AP$.
Calculer la matrice D.

9. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de taille 3×3 à coefficients réels.

a. Calculer séparément les matrices DM et MD en fonction de a, b, c, d, e, f, g, h et i.

b. On suppose de plus que $DM = MD$. Montrer que M est une matrice diagonale.

c. On suppose réciproquement que M est une matrice diagonale. A-t-on $DM = MD$?

10. Soit M une matrice de taille 3×3 à coefficients réels, telle que $AM = MA$.

a. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

b. En déduire que M est de la forme $M = PU({}^tP)$, avec U une matrice diagonale et P la matrice de passage trouvée en question 5.

c. Prouver qu'il existe trois coefficients a, b et c tels que l'on ait $M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$.

11. Soit a, b et c trois réels. Calculer les deux produits matriciels suivants :

$$A \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} A$$

12. Donner alors toutes les matrices M de taille 3×3 et à coefficients réels, telles que $AM = MA$.

Solution.

1. a. On cherche un vecteur $u_0 = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0_{3,1}$. Ceci conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

De plus, on veut que $x=1$ donc $\boxed{u_0 = (1\,;0\,;-1)}$.

On cherche un vecteur $u_1 = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Ceci conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+z=x \\ y=y \\ x+z=z \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

De plus, on veut que $y=1$ donc $\boxed{u_1 = (0\,;1\,;0)}$.

On cherche un vecteur $u_2 = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Ceci conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+z=2x \\ y=2y \\ x+z=2z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

De plus, on veut que $x=1$ donc $\boxed{u_2 = (1\,;0\,;1)}$.

b. Comme u_0, u_1, u_2 sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes, la famille (u_0, u_1, u_2) est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{(u_0, u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. $u_0 \cdot u_1 = 1\times 0 + 0\times 1 + (-1)\times 0 = 0$, $u_0 \cdot u_2 = 1\times 1 + 0\times 0 + (-1)\times 1 = 0$ et $u_1 \cdot u_2 = 0\times 1 + 1\times 0 + 0\times 1 = 0$ donc les vecteurs $\boxed{u_0,\ u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont deux à deux orthogonaux}}$.

3. $\|u_0\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\|u_1\| = \sqrt{0^2+1^1+0^2} = 1$ et $\|u_2\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$.

4. Comme les vecteurs e_0, e_1, e_2 sont des vecteurs non nuls respectivement colinéaires aux vecteurs u_0, u_1, u_2 qui forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, (e_0, e_1, e_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. De plus, pour $i \in \{0\,;1\,;2\}$, $\|e_i\| = \left\|\dfrac{1}{\|u_i\|}u_i\right\| = \dfrac{1}{\|u_i\|} \times \|u_i\| = 1$ donc $\boxed{(e_0, e_1, e_2) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3}$.

5. Les colonnes de P sont les coordonnées de e_0, e_1 et e_2 dans la base canonique donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

6. Comme (e_0, e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{P \text{ vérifie } {}^tPP = I_3}$.

7. On en déduit que $\boxed{P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

8.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Remarque. L'énoncé demande un calcul donc nous avons calculer $P^{-1}AP$ mais comme P est formé de vecteurs propres associés aux valeurs propres de A, on savait par avance qu'on allait trouver une matrice diagonale avec les valeurs propres 0, 1 et 2 sur la diagonale.

9. a. D'une part,

$$DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$$MD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}.$$

b. Comme $DM = MD$, $b = 2c = d = 2g = 0$, $f = 2f$ et $2h = h$ donc $b = c = d = f = g = h = 0$ et ainsi $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M \text{ est une matrice diagonale}}$.

c. Si M est diagonale alors $b = c = d = f = g = h = 0$ donc, d'après **a.**,

$$DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{DM = MD}$.

10. a. Notons $U = P^{-1}MP$. Alors, par associativité du produit matriciel,

$$DU = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = P^{-1}A(PP^{-1})MP = P^{-1}AI_3MP = P^{-1}AMP$$

donc, comme $AM = MA$,

$$DU = P^{-1}MAP = P^{-1}MI_3AP = P^{-1}M(PP^{-1})AP^{-1} = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP)$$

et ainsi $DU = UD$. On déduit alors de la question **9.b.** que $\boxed{U \text{ est diagonale}}$.

b. On en déduit que $\boxed{M = PUP^{-1} = PU({}^tP)}$ puisque $P^{-1} = {}^tP$.

c. Notons a, b et c les coefficients diagonaux de U c'est-à-dire $U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} M = PUP^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{2}} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{-a+c}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{-a+c}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe bien trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}}$.

11. D'une part,

$$A \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$$\begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix}.$$

12. La question **10.** assure que toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$ et la question **11.** montre que toute matrice de cette forme commute avec A. On conclut donc que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices de la forme $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } (a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^2}$.

Remarque. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A est l'ensemble des matrices de la forme $aM_1 + bM_2 + cM_3$ où

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et a, b et c sont des réels quelconques. Ainsi, $\mathrm{C}(A) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, on vérifie facilement que M_1, M_2 et M_3 forment une famille libre donc $\mathrm{C}(A)$ est de dimension 3 et (M_1, M_2, M_3) est est une base.