TB2 **mars 2024**

Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 3 avril 2024

On considère dans tout l'exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer trois vecteurs propres u_0, u_1 et u_2 de la matrice A, en respectant les contraintes suivantes :

- u_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, et de première coordonnée 1 ;
- u_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, et de deuxième coordonnée 1 ;
- u_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, et de première coordonnée 1.

b. Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2) est une base $\mathbb{R}^3$.

2. Vérifier que les trois vecteurs propres trouvés plus haut sont deux à deux orthogonaux.

3. Calculer les normes de chacun des trois vecteurs propres : $\|u_1\|$, $\|u_2\|$ et $\|u_3\|$.
On pose $e_0 = \dfrac{1}{\|u_0\|}u_0$, $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}u_1$, $e_2 = \dfrac{1}{\|u_2\|}u_2$. On note (B) la famille (e_0, e_1, e_2).

4. Montrer que (B) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (B). Donner la matrice P.

6. Donner une relation entre P et sa transposée ${}^tP$.

7. Donner alors l'inverse de P.

8. On pose désormais $D = P^{-1}AP$.
Calculer la matrice D.

9. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de taille 3×3 à coefficients réels.

a. Calculer séparément les matrices DM et MD en fonction de a, b, c, d, e, f, g, h et i.

b. On suppose de plus que $DM = MD$. Montrer que M est une matrice diagonale.

c. On suppose réciproquement que M est une matrice diagonale. A-t-on $DM = MD$?

10. Soit M une matrice de taille 3×3 à coefficients réels, telle que $AM = MA$.

a. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

b. En déduire que M est de la forme $M = PU({}^tP)$, avec U une matrice diagonale et P la matrice de passage trouvée en question 5.

c. Prouver qu'il existe trois coefficients a, b et c tels que l'on ait $M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$.

11. Soit a, b et c trois réels. Calculer les deux produits matriciels suivants :

$$A\begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}A$$

12. Donner alors toutes les matrices M de taille 3×3 et à coefficients réels, telles que $AM = MA$.