Devoir à la maison n°7

À rendre le mercredi 21 janvier 2026

Soit α un réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}.$$

1. a. Soit A un réel supérieur ou égal à 1. On pose $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $I(A) = 1 - \dfrac{1}{A^\alpha}$.

b. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que le temps durant lequel une bougie reste allumée en continu est une variable aléatoire X ayant pour densité f.

2. a. Calculer $J(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $A \geqslant 1$.

b. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

3. Soit F la fonction de répartition de X.

a. Déterminer $F(x)$ pour tout réel $x < 1$.

b. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^\alpha}$.

4. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $\alpha = 2$. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.
On prend une bougie au hasard et on l'allume.

a. Quelle est la probabilité que la bougie reste allumée en continu plus de deux heures ?

b. Quelle est la probabilité que la bougie reste allumée en continu entre deux et trois heures ?

c. Si la bougie est encore allumée au bout de deux heures, quelle est la probabilité qu'elle reste allumée encore au moins une heure supplémentaire ?

5. On pose $Y = \ln(X)$. On admet que Y est une variable aléatoire à densité et on note G sa fonction de répartition.

a. Montrer que, pour tout réel x, $G(x) = F(\mathrm{e}^x)$.

b. En déduire que, pour tout réel x,

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

c. Déterminer une densité de probabilité de Y.

d. Reconnaître la loi de Y et en déduire son espérance.

Solution.

1. a. Comme

$$I(A)=\int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t^\alpha}\right]_1^A=-\frac{1}{A^\alpha}-\left(-\frac{1}{1^\alpha}\right)=-\frac{1}{A^\alpha}+1$$

on a bien $\boxed{I(A)=1-\dfrac{1}{A^\alpha}}$.

b. • la fonction f est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues et elle est nulle sur $]-\infty\,;0[$ donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Comme $\alpha>0$, pour tout réel $t\geqslant 1$, $f(t)\geqslant 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

• Enfin, comme $\alpha>0$, $A^\alpha \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$ donc $I(A)\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$. Dès lors, $\displaystyle\int_1^A f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. a. Soit un réel $A\geqslant 1$. Comme $\alpha>1$,

$$J(a)=\int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\alpha}{\alpha-1}\times\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^A=-\frac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}-\left(-\frac{\alpha}{(\alpha-1)1^{\alpha-1}}\right)$$

donc $\boxed{J(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}-\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}}$.

b. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;1[$, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or, pour tout réel $A\geqslant 1$,

$$\int_1^A tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^A t\times\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t=\int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t=J(A).$$

Or, comme $\alpha>1$, $A^{\alpha-1}\xrightarrow[A\to+\infty]{}+\infty$ donc $J(A)\xrightarrow[A\to+\infty]{}\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. On en déduit que $\boxed{X \text{ admet une espérance et que } \mathbf{E}(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}$.

On en déduit que le temps moyen durant lequel une bougie reste allumée en continu est $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ heures.

3. a. Soit un réel $x<1$. Alors,

$$F(x)=\mathbf{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t=0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x<1,\ F(x)=0}$.

b. Soit un réel $x\geqslant 1$. Alors,

$$\begin{aligned}F(x)=\mathbf{P}(X\leqslant x)&=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^1 0\,\mathrm{d}t+\int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t=0+I(x)\end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 1,\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^\alpha}}$.

4. a. Comme

$$\mathbf{P}(X > 2) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{4},$$

$\boxed{\text{la probabilité que la bougie reste allumée en continue plus de 2 heures est } \dfrac{1}{4}}$.

b. Comme X est une variable aléatoire à densité, $\mathbf{P}(X < 2) = \mathbf{P}(X \leqslant 2)$ donc

$$\mathbf{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \mathbf{P}(X \leqslant 3) - \mathbf{P}(X < 2) = \mathbf{P}(X \leqslant 3) - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = F(3) - F(2)$$
$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{3}{4} = \frac{5}{36}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que la bougie reste allumée entre 2 et 3 heures est } \dfrac{5}{36}}$.

c. On cherche

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2 + 1 \mid X \geqslant 2) = \frac{\mathbf{P}((X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 2))}{\mathbf{P}(X \geqslant 2)}.$$

Or, $(X \geqslant 3) \subset (X \geqslant 2)$ donc $(X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 2) = (X \geqslant 3)$ et ainsi, comme X est une variable aléatoire à densité,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2 + 1 \mid X \geqslant 2) = \frac{\mathbf{P}((X \geqslant 3)}{\mathbf{P}(X \geqslant 2)} = \frac{\mathbf{P}((X > 3)}{\mathbf{P}(X > 2)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(2)}$$
$$= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{1}{9} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{9}.$$

<u>La probabilité que la bougie reste allumée au moins 3 heures sachant qu'elle est déjà restée allumée 2 heures est donc $\dfrac{4}{9}$</u>.

5. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$G(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(\ln(X) \leqslant x).$$

Or, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $(\ln(X) \leqslant x) = (X \leqslant \mathrm{e}^x)$ donc $G(x) = \mathbf{P}(X \leqslant \mathrm{e}^x)$ i.e. $\boxed{G(x) = F(\mathrm{e}^x)}$.

b. On en déduit que si $\mathrm{e}^x < 1$ alors $G(x) = 0$ et, si $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, alors

$$G(x) = 1 - \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^\alpha} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$

Or, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \iff x \geqslant 0$$

donc on conclut que

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

c. Pour tout $x \in]-\infty\,;0[$, $G'(x) = 0$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $G'(x) = \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}$ donc une densité de Y est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

d. On déduit de la question précédente que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)}$ et donc $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{1}{\alpha}}$.