Devoir à la maison n°7

À rendre le jeudi 22 janvier 2025

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. On considère une variable aléatoire X admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

- **a.** Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $F_X(x) = 1$.
- **b.** Soit un réel $x < 0$. Calculer $F_X(x)$.

3. On considère la variable aléatoire $Y = -X$ et on note F_Y sa fonction de répartition.

- **a.** Exprimer, pour tout réel x, $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.
- **b.** En déduire, à l'aide de la question **2.**, que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- **c.** En déduire la valeur de l'espérance de X.

4. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \mathrm{e}^X$.

- **a.** Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
- **b.** En déduire une densité de Z puis reconnaître la loi de Z.

Solution.

1. La fonction f est continue sur $]-\infty\,;0]$ et nulle sur $]0\,;+\infty[$ donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t, $\mathrm{e}^t > 0$ donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Enfin, comme f est nulle sur $]0\,;+\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout réel $x < 0$,

$$\int_{x}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_x^0 = 1 - \mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1$ et ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$.

2. a. Soit un réel $x \geqslant 0$. Alors, d'après le calcul de la question précédente,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 0,\ F_X(x) = 1}$.

b. Comme $x < 0$,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a < x$. Alors,

$$\int_{a}^{x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_a^x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a \xrightarrow[a\to-\infty]{} \mathrm{e}^x.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$ donc $\boxed{F_X(x) = \mathrm{e}^x}$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(-X \leqslant x) = \mathbf{P}(X \geqslant -x) = 1 - \mathbf{P}(X < -x).$$

Or, comme X est une variable aléatoire à densité, $\mathbf{P}(X < -x) = \mathbf{P}(X \leqslant -x) = F_X(-x)$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = 1 - F_X(-x)}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$ alors $-x > 0$ donc $F_X(-x) = 1$ et ainsi $F_Y(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$ alors $-x \leqslant$ donc $F_X(-x) = \mathrm{e}^{-x}$ et ainsi $F_Y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. On en déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout réel $x < 0$, $F_Y'(x) = 0$ et, pour tout réel $x > 0$, $F_Y'(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, une densité de $-X$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1 donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)}$.

c. Par propriété, on a donc $\mathbf{E}(Y) = 1$. Or, par linéarité, $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(-X) = -\mathbf{E}(X)$ donc on conclut que $\boxed{\mathbf{E}(X) = -1}$.

4. a. Soit un réel x. Alors,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}(\mathrm{e}^X \leqslant x).$$

Si $x \leqslant 0$ alors $(\mathrm{e}^X \leqslant x) = \varnothing$ donc $F_Z(x) = 0$.
Si $x > 0$ alors, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $F_Y(x) = \mathbf{P}(X \leqslant \ln(x)) = F_X(\ln(x))$.
Si $x \geqslant 1$ alors $\ln(x) \geqslant 0$ donc $F_X(\ln(x)) = 1$ et ainsi $F_Z(x) = 1$.
Si $x \in \,]0\,;1[$ alors $\ln(x) < 0$ donc $F_X(\ln(x)) = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ et ainsi $F_Z(x) = x$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in \,]0\,;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$.

b. Ainsi, pour tout réel $x \leqslant 0$, $F_Z'(x) = 0$, pour tout réel $x \in \,]0\,;1[$, $F_Z'(x) = 1$ et, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F_Z'(x) = 0$.
On en déduit donc qu'une densité de Z est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît la densité d'une loi uniforme sur $[0\,;1]$ donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{U}([0\,;1])}$.