Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 7 janvier 2026

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le rang de f, son image et son noyau. On montrera en particulier que $\ker(f)$ est une droite vectorielle et on écrire $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1, b, c)$ avec b et c deux réels à déterminer.

2. On pose $v = (1, 1, -1)$ et $w = (1, 1, 2)$. Exprimer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w.

3. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer (sans autre calcul) la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.

5. Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

6. Calculer P^{-1}.

7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de A^n.

8. On considère les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Solution.

1. Notons C_1, C_2 et C_3 les trois matrices colonnes de A (dans cette ordre. Par propriété le rang de A est la dimension de $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$. Or, $C_1 = C_2$ donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_3)$. De plus, C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires donc (C_1, C_3) est libre. On conclut que $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$. On en déduit également que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,0,1),(1,1,1))}$. Enfin, considérons $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Ainsi, $\ker(f) = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ donc $\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))}$.

2. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $f(1,1,-1) = (-1,-1,1)$ i.e. $\boxed{f(v) = -v}$. De même, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ donc $f(1,1,2) = (2,2,3)$ i.e. $\boxed{f(w) = 2w}$.

3. Soit a, b et c trois réels. Alors,

$$au + bv + cw = (a + b + c, -a + b + c, -b + 2c = 0)$$

donc

$$\begin{aligned} au + bv + cw = (0,0,0) &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & L_1 \\ -a + b + c = 0 & L_2 \\ -b + 2c = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & L_1 \\ 2b + 2c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -b + 2c = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ -b + 2c = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & L_1 \\ b + c = 0 & L_2 \\ 3c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient un système homogène de Cramer (car il y a 3 pivots) donc l'unique solution du système est $(0,0,0)$. Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la $\mathcal{C}$ est libre. Dès lors, $\mathcal{C}$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

4. Comme $f(u) = 0$, $f(v) = -v$ et $f(w) = 2w$, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

5. Par définition, $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$. Par les formules de changement de bases, $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation.** $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $A^0 = PD^0P^{-1}$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tous réels x, y et z :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ -x+y+z=b & L_2 \\ -y+2z=c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ 2y+2z=a+b & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ -y+2z=c & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ y+z=\dfrac{a+b}{2} & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ 3z=\dfrac{a+b}{2}+c & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+\dfrac{a+b+2c}{6}=a \\ y+\dfrac{a+b+2c}{6}=\dfrac{a+b}{2} \\ z=\dfrac{a+b+2c}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+\dfrac{a+b+2c}{6}=a \\ y=\dfrac{3a+3b}{6}-\dfrac{a+b+2c}{6} \\ z=\dfrac{a+b+2c}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+\dfrac{2a+2b-2c}{6}=\dfrac{5a-b-2c}{6} \\ y=\dfrac{2a+2b-2c}{6} \\ z=\dfrac{a+b+2c}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{5a-b-2c}{6}-\dfrac{2a+2b-2c}{6} \\ y=\dfrac{2a+2b-2c}{6} \\ z=\dfrac{a+b+2c}{6} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{3a-3b}{6} \\ y=\dfrac{2a+2b-2c}{6} \\ z=\dfrac{a+b+2c}{6} \end{cases}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^n}{3} & \frac{(-1)^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n}{6} & \frac{2^n}{6} & \frac{2^n}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} & \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} & -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{3} \\ \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} & \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} & -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{3} \\ -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{3} & \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n & 2^{n+2} + 2(-1)^n \end{pmatrix}}.$$

8. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n \\ c_n \\ a_n + b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».
Initialisation. Comme $A^0 = I_3$, $A^0 X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = (AA^n)X_0 = A^{n+1} X_0$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$

c. Comme $X_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n & 2^{n+2} + 2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ 2(-1)^n + 2^n \\ 2^{n+1} - 2(-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n-1} \\ (-1)^n + 2^{n-1} \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} \qquad b_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3} \qquad c_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$