Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 7 janvier 2026

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le rang de f, son image et son noyau. On montrera en particulier que $\ker(f)$ est une droite vectorielle et on écrire $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1, b, c)$ avec b et c deux réels à déterminer.

2. On pose $v = (1, 1, -1)$ et $w = (1, 1, 2)$. Exprimer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w.

3. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer (sans autre calcul) la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.

5. Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

6. Calculer P^{-1}.

7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de A^n.

8. On considère les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de a_n, b_n et c_n en fonction de n.