Devoir à la maison n°6

À rendre le vendredi 26 janvier 2024

Soit X une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On définit une variable aléatoire Y en posant :

$$Y = \exp(-X) = \mathrm{e}^{-X}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y.

Dans tout l'exercice, on note F_X la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y.

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Partie B. — Dans cette partie, on se donne un nombre réel a.

1. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ d'inconnue x. On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif ou nul.

2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))$.

b. Montrer que $F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$.

c. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Donner le signe de $-\ln(a)$ et en déduire la valeur de $F_Y(a)$.

d. On suppose dans cette question que $a \in \,]0\,;1]$.
Montrer que $F_Y(a) = a$.

3. Calculer $F_Y(a)$ pour $a \leqslant 0$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Y.

Partie C

1. **a.** Montrer que la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

b. Calculer la dérivée de F_Y sur chacun de ces intervalles.

2. Déduire de la question précédente la loi de Y. On reconnaître une loi classique dont on donnera les paramètres éventuels.

Solution.

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Supposons $x < 0$. Comme la densité de X est nulle sur $]-\infty\,;0[$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$ i.e. $F_X(x) = 0$.

Supposons $x \geqslant 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} - (-\mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

i.e. $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

On conclut donc que, pour tout réel x,

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}.$$

2. a. Soit $x \geqslant 0$. Alors,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}}$.

b. D'après le théorème de transfert, Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge i.e. si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge. On déduit donc de la question précédente que Y admet un espérance et que $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2}}$.

Partie B

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc, si $a \leqslant 0$, alors l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ est $\varnothing$.

Supposons $a > 0$. Alors, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant a \iff -x \leqslant \ln(a) \iff x \geqslant -\ln(a)$$

donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ est $[-\ln(a)\,;+\infty[$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \mathrm{e}^{-x} \leqslant a \text{ est } \varnothing \text{ si } a \leqslant 0 \text{ et } [-\ln(a)\,;+\infty[\text{ si } a > 0}$.

2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a. Comme $a > 0$, d'après la question précédente, $\{Y \leqslant a\} = \{\mathrm{e}^{-X} \leqslant a\} = \{X \geqslant -\ln(a)\}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))}$.

b. Grâce à la question précédente,

$$F_Y(a) = \mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a)) = 1 - \mathbf{P}(X < -\ln(a)) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant -\ln(a))$$

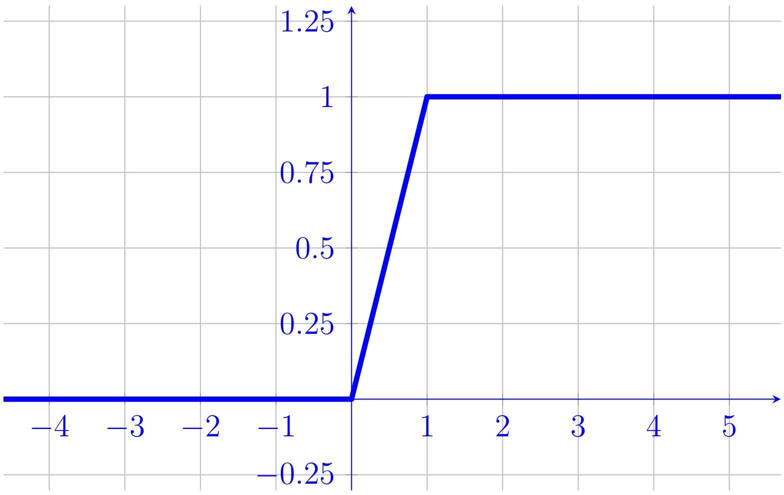
car X est une variable aléatoire à densité et donc $\boxed{F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))}$.

c. Comme $a > 1$, $\ln(a) > 0$ donc $-\ln(a) < 0$. Dès lors, d'après la question **1.** de la **Partie A**, $F_X(-\ln(a)) = 0$ et on cpnclut, grâce à la question précédente que $\boxed{F_Y(a) = 0}$.

d. Comme $a \in]0\,;1]$, $\ln(a) > 0$ donc d'après la question **1.** de la **Partie A**, $F_X(-\ln(a)) = 1 - \mathrm{e}^{-(-\ln(a))} = 1 - \mathrm{e}^{\ln(a)} = 1 - a$. On déduit alors de la question **2.b.** que $F_Y(a) = 1 - (1 - a)$ i.e. $\boxed{F_Y(a) = a}$.

3. Supposons que $a \leqslant 0$. Comme $Y = \mathrm{e}^{-X} > 0$, $\{Y \leqslant a\}$ est un évènement impossible donc $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = 0$ i.e. $\boxed{F_Y(a) = 0}$.

4. La courbe représentative de F_Y est la suivante :



Partie C

1. a. La fonction F_Y est continue et dérivable sur $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ car, sur chacun de ces intervalles, elle est affine. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} F_Y(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} 0 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} F_Y(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0$ et $F_Y(0) = 0$ donc F_Y est continue en 0. De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} F_Y(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} F_Y(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} 1 = 1$ et $F_Y(1) = 1$ donc F_Y est continue en 1. Par conséquent, on conclut que $\boxed{F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

b. Sur les deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$, F_Y est constante donc, pour tout $x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$, $F_Y'(x) = 0$.

Pour tout $x \in]0\,;1[$, $F_Y(x) = x$ donc $F_Y'(x) = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\},\ F_Y'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0\,;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

2. On déduit de la question précédente que $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de Y et on conclut que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0\,;1])}$.