Devoir à la maison n°6

À rendre le vendredi 26 janvier 2024

Soit X une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On définit une variable aléatoire Y en posant :

$$Y = \exp(-X) = \mathrm{e}^{-X}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y.

Dans tout l'exercice, on note F_X la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y.

Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Partie B. — Dans cette partie, on se donne un nombre réel a.

1. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-x} \leqslant a$ d'inconnue x. On distinguera deux cas : celui où a est strictement positif et celui où a est négatif ou nul.

2. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant a) = \mathbf{P}(X \geqslant -\ln(a))$.

b. Montrer que $F_Y(a) = 1 - F_X(-\ln(a))$.

c. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Donner le signe de $-\ln(a)$ et en déduire la valeur de $F_Y(a)$.

d. On suppose dans cette question que $a \in]0\,;1]$.
Montrer que $F_Y(a) = a$.

3. Calculer $F_Y(a)$ pour $a \leqslant 0$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Y.

Partie C

1. **a.** Montrer que la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

b. Calculer la dérivée de F_Y sur chacun de ces intervalles.

2. Déduire de la question précédente la loi de Y. On reconnaître une loi classique dont on donnera les paramètres éventuels.