TB2 **décembre 2025**

Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 10 décembre 2025

Exercice 1. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On écrit P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que

$$f(P) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c.$$

3. Déterminer le noyau de f et en déduire la dimension de l'image de f.

4. Justifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer $\mathrm{Im}(f)$ par un argument de dimension.

Solution.

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X)) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. Par définition,

$$\begin{aligned} f(P) &= a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - (aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + cX + c + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= aX^3 + 3aX^2 + 3aX + a + bX^2 + 2bX + b + cX + c - aX^3 - bX^2 - cX \\ &= 3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c \end{aligned}$$

donc $\boxed{f(P) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c}$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On écrit P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$P \in \ker(f) \iff 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \iff \begin{cases} 3a = 0 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(f) = \{d \mid d \in \mathbb{R}\}$ i.e. $\boxed{\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]}$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Or, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\ker(f))$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 1 = 3}$.

4. D'après le résultat de la question **2.**, si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ alors $f(P) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]}$. Or, $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathrm{Im}(f))$ donc, par théorème, comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P le polynôme de degré deux, défini pour tout réel x, par

$$P(x) = x^2 - 2x - 3.$$

   Déterminer, pour tout réel x, le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. **a.** Montrer que $f'(x) = -xP(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.
   b. Dresser le tableau de variation complet de f.
   c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

   a. Montrer que I_0 converge et calculer sa valeur.
   b. Soit un réel $a > 1$. En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^a x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{a^{n+1}}{\mathrm{e}^{a}} + \frac{1}{e} + (n+1)\int_1^a x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

   c. En raisonnant par récurrence, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et que

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

   d. Calculer I_1, I_2 et I_3.
   e. Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Solution.

1. Le discriminant de P est $(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc P possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3.$$

   Comme $a = 1 > 0$, on conclut que $\underline{P(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[}$ et $\underline{P(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-1\,;3]}$.

2. Aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $f(x) \sim x^3 \,\mathrm{e}^{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. Par équivalence, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^3} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x} = 0$. Par équivalence, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. a. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (3x^2+2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^3+x^2-x-1)(-\mathrm{e}^{-x})\\
&= (3x^2+2x-1-x^3-x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= (-x^3+2x^2+3x)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= -x(x^2-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = -xP(x)\,\mathrm{e}^{-x}}$.

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-xP(x)$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
signe de $-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$32\,\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	0

c. Comme $f(1) = (1^3+1^2-1-1)\,\mathrm{e}^{-1} = 0$, on déduit du tableau de variation que $\boxed{f(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \,]-\infty\,;1] \text{ et } f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [1\,;+\infty[}$.

4. a. Par définition, $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. Soit $a > 1$. Alors,

$$\int_1^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a = -\mathrm{e}^{-a} - (-\mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{e} - \mathrm{e}^{-a}.$$

Or, on a vu en question **2.** que $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$ donc $\displaystyle\int_1^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{e}$. Ainsi, $\boxed{I_0 \text{ converge et } I_0 = \dfrac{1}{e}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions

$$u : x \longmapsto x^{n+1} \qquad \text{et} \qquad v : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;a]$ avec

$$u' : x \longmapsto (n+1)x^n \qquad \text{et} \qquad v' : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^a x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \left[x^{n+1}\times(-\mathrm{e}^{-x})\right]_1^a - \int_1^a (n+1)x^n \times (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \\ &= -a^{n+1}\,\mathrm{e}^{-a} - (1^{n+1}(-\mathrm{e}^{-1})) + (n+1)\int_1^a x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_1^a x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{a^{n+1}}{\mathrm{e}^{a}} + \frac{1}{e} + (n+1)\int_1^a x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.}$$

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « I_n converge ».

- **Initialisation** On a vu dans la question **4.a.** que I_0 converge.
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que I_n converge.

Alors, par définition, $\displaystyle\int_1^a x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} I_n$. De plus, par croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{a^{n+1}} \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$ donc, par inverse, $\dfrac{a^{n+1}}{\mathrm{e}^{a}} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$. Il s'ensuit, en utilisant également le résultat de la question **b.** que

$$\int_1^a x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

Ainsi, I_{n+1} converge et $I_{n+1} = \dfrac{1}{e} + (n+1)I_n$.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n \text{ converge}}$ et, de plus,

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n}.$$

d. Comme $I_0 = \dfrac{1}{e}$, $I_1 = \dfrac{1}{e} + 1 \times \dfrac{1}{e}$ donc $\boxed{I_1 = \dfrac{2}{e}}$, $I_2 = \dfrac{1}{e} + 2 \times \dfrac{2}{e}$ i.e. $\boxed{I_2 = \dfrac{5}{e}}$ et $I_3 = \dfrac{1}{e} + 3 \times \dfrac{5}{e}$ soit $\boxed{I_3 = \dfrac{16}{e}}$.

e. Soit $a > 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^a x^3\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^a x^2\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_1^a x\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_1^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

donc, d'après les questions précédentes,

$$\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[a\to+\infty]{} I_3 + I_2 - I_1 - I_0 = \frac{16}{e} + \frac{5}{e} - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{18}{e}.$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et } \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{18}{e}}$.