TB2 **décembre 2025**

Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 10 décembre 2025

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On écrit P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que

$$f(P) = 3aX^2 + (3a + 2b)X + a + b + c.$$

3. Déterminer le noyau de f et en déduire la dimension de l'image de f.

4. Justifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer $\mathrm{Im}(f)$ par un argument de dimension.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P le polynôme de degré deux, défini pour tout réel x, par

$$P(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Déterminer, pour tout réel x, le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. **a.** Montrer que $f'(x) = -xP(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.

b. Dresser le tableau de variation complet de f.

c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que I_0 converge et calculer sa valeur.

b. Soit un réel $a > 1$. En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^a x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{a^{n+1}}{\mathrm{e}^{a}} + \frac{1}{e} + (n+1)\int_1^a x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

c. En raisonnant par récurrence, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et que

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

d. Calculer I_1, I_2 et I_3.

e. Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.