Devoir à la maison n°5

À rendre le vendredi 12 janvier 2024

Exercice 1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ et $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)\,\mathrm{e}^{x}$. On admet que les fonctions P et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour tout réel x, $P'(x)$ puis $P'(x) + P(x)$.
2. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$.
3. Soit x un nombre réel. Factoriser $x^3 - x$.
4. Tracer le tableau de variations de f. On fera apparaître les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Justifier que, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f(x) < 0$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[-2e\,;+\infty[$.
7. Donner le signe de f sur $]-\infty\,;-1]$.
8. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
9. Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 3x^2 + 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que celle-ci est comprise entre 1 et 2.

Solution.

1. Pour tout réel x, $\boxed{P'(x) = 3x^2 - 6x + 5}$ et $P'(x)+P(x) = 3x^2-6x+5+x^3-3x^2+5x-5$ i.e. $\boxed{P'(x) + P(x) = x^3 - x}$.
2. Pour tout réel x, $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{x}$ donc $f'(x) = P'(x)\,\mathrm{e}^{x} + P(x)\,\mathrm{e}^{x}) = (P'(x) + P(x))\,\mathrm{e}^{x}$ et ainsi $\boxed{f'(x) = (x^3 - x)\,\mathrm{e}^{x}}$.
3. $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ donc $\boxed{x^3 - x = x(x-1)(x+1)}$.
4. Au voisinage de $+\infty$, $P(x) \sim x^3$ donc $f(x) \sim x^3\,\mathrm{e}^{x}$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   De même, au voisinage de $-\infty$, $P(x) \sim x^3$ donc $f(x) \sim x^3\,\mathrm{e}^{x}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de e^{x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-14\,\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le maximum de f sur $[-1\,;1]$ est -5 donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1\,;1],\ f(x) < 0}$.
6. Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $f(1) = -2e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection, $\underline{f \text{ réalise une bijection de } [1\,;+\infty[\text{ sur } [-2e\,;+\infty[}$.
7. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc on conclut que $\boxed{\text{pour tout } x \in\,]-\infty\,;-1],\ f(x) < 0}$.
8. D'après ce qui précède, pour tout $x \in\,]-\infty\,;1[$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty\,;1[$. Par ailleurs, f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[-2e\,;+\infty[$ et $0 \in [-2e\,;+\infty[$ donc $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [1\,;+\infty[$.
   On conclut que $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution l'équation } f(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.
9. Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ équivaut à $x^3 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$ i.e. $P(x) = 0$. Ainsi, $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de } P(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$.
   De plus, $P(1) = -2 < 0$ et $P(2) = 1 > 0$ donc $\boxed{\alpha \in\,]1\,;2[}$.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. **Premières propriétés**
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. **Divergence en $+\infty$**
   a. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une absurdité.
   b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. **Obtention d'un équivalent**
   On définit la suite (a_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{e}^{u_n}$.
   a. Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (a_n).
   b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x} \leqslant 1 + ex$.
   c. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{a_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 1$.
   d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$.
   e. Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(ne+1)$.
   f. Donner un équivalent simple de (u_n).

Solution.

1. a. $u_1 = u_0 + \mathrm{e}^{-u_0} = 0 + \mathrm{e}^{0}$ donc $\boxed{u_1 = 1}$ et, de même, $\boxed{u_2 = 1 + \mathrm{e}^{-1}}$.
   b. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».
      - **Initialisation.** $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.
      - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors, $u_n \geqslant 0$ et, comme exp est à valeurs positives, $\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 0$ donc $u_n + \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 0$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

2. a. Si (u_n) converge L alors (u_{n+1}) converge aussi vers L. Or, comme la fonction $x \longmapsto x + \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions continues, $u_n + \mathrm{e}^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L + \mathrm{e}^{-L}$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L + \mathrm{e}^{-L}$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $L = L + \mathrm{e}^{-L}$ donc $\mathrm{e}^{-L} = 0$ ce qui est absurde puisque la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Comme (u_n) est croissante et qu'elle ne converge pas d'après la question précédente, le théorème des suites monotones assure que $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

3. a. Comme la fonction exp est à valeurs positives, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n > 0}$. De plus, comme (u_n) est croissante et comme la fonction exp est croissante, par composition, $\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$.

b. Considérons la fonction $f : \mathrm{e}^x - (1+x)$ définie sur $[0\,;1]$. La fonction f est dérivable comme différence de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, $x \geqslant 0$ donc, par croissance de exp, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$ i.e. $\mathrm{e}^x \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\,;1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geqslant f(0)$ i.e. $f(x) \geqslant 0$ car $f(0) = \mathrm{e}^0 - (0+1) = 1 - 1 = 0$. On a donc montré que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^x - (1+x) \geqslant 0$ donc, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Considérons la fonction $g : 1 + ex - \mathrm{e}^x$ définie sur $[0\,;1]$. La fonction f est dérivable comme différence de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = e - \mathrm{e}^x$. Or, $x \leqslant 1$ donc, par croissance de exp, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ i.e. $\mathrm{e}^x \leqslant e$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[0\,;1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $g(x) \geqslant g(0)$ i.e. $g(x) \geqslant 0$ car $g(0) = 1 + 0 - \mathrm{e}^0 = 1 - 1 = 0$. On a donc montré que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 + ex - \mathrm{e}^x \geqslant 0$ donc, pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 + ex \geqslant \mathrm{e}^x$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1],\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + ex}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ donc $\frac{1}{a_n} > 0$. De plus, la suite (a_n) est croissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant a_0$. Or, $a_0 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_n} \in [0\,;1]$ donc, en appliquant la question précédente avec $x = \frac{1}{a_n}$ on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 + \frac{1}{a_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = \mathrm{e}^{u_{n+1}} = \mathrm{e}^{u_n + \mathrm{e}^{-u_n}} = \mathrm{e}^{u_n}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-u_n}} = a_n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{u_n}}} = a_n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}}.$$

Or,$\mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}} \geqslant 1 + \frac{1}{a_n}$ donc, comme $a_n > 0$, $a_n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}} \geqslant a_n\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ i.e. $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$.

Ainsi, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n \geqslant 1}$.

d. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ donc, en reconnaissant une somme téléscopique, $a_n - a_0 \geqslant n$. Or, $a_0 = 1$ donc $a_n \geqslant n + 1$. Ainsi, $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant n + 1$ donc, par croissante de ln sur $]0\,;+\infty[$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$.

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ln(n+1)}$.

e. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}} \leqslant 1 + dfrac e a_n$ donc, comme $a_n > 0$, $a_n \, \mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}} \leqslant a_n + e$ i.e. $a_{n+1} \leqslant a_n + e$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \leqslant e$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e$ i.e. $a_n - a_0 \leqslant ne$. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant ne + 1$ donc, en composant avec ln, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(ne+1)}$.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(ne+1)$. Or, pour tout $n > 0$, $\ln(n+1) = \ln(n(1+\frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})$ et $\ln(ne+1) = \ln(n(e+\frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(e+\frac{1}{n})$ donc, pour tout $n > 0$,

$$\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + \ln\left(e + \frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n > 1$, $\ln(n) > 0$ donc

$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Par continuité de ln, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(e+\frac{1}{n}\right) = \ln(e) = 1$ donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$ donc, finalement, on conclut que

$$\boxed{u_n \sim \ln(n)}.$$