TB2 **décembre 2023**

Devoir à la maison n°5

À rendre le vendredi 12 janvier 2024

Exercice 1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ et $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)\,\mathrm{e}^{x}$. On admet que les fonctions P et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour tout réel x, $P'(x)$ puis $P'(x) + P(x)$.

2. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$.

3. Soit x un nombre réel. Factoriser $x^3 - x$.

4. Tracer le tableau de variations de f. On fera apparaître les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Justifier que, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f(x) < 0$.

6. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[-2e\,;+\infty[$.

7. Donner le signe de f sur $]-\infty\,;-1]$.

8. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

9. Montrer que l'équation $x^3 + 5x = 3x^2 + 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et que celle-ci est comprise entre 1 et 2.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Premières propriétés

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Divergence en $+\infty$

a. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une absurdité.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Obtention d'un équivalent

On définit la suite (a_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

a. Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (a_n).

b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x} \leqslant 1 + ex$.

c. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{a_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{a_n}}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 1$.

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$.

e. Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(ne+1)$.

f. Donner un équivalent simple de (u_n).