Devoir à la maison n°4

À rendre le jeudi 19 novembre 2026

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) = P(X+1) - 2P(X) + P(X-1).$$

On admet que f est bien définie i.e. que, pour tout $P \in E$, $f(P) \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in E$ où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$.

- **a.** Déterminer l'expression de $P(X+1)$ et $P(X-1)$ dans la base canonique de E.
- **b.** En déduire l'expression de $f(P)$ dans la base canonique de E.
- **c.** Justifier que $\text{rg}(f) \leqslant 3$.

3.

- **a.** Déterminer $\ker(f)$. (On reconnaîtra un espace vectoriel usuel.)
- **b.** En déduire le rang de f.
- **c.** Déterminer $\text{Im}(f)$. (On reconnaîtra un espace vectoriel usuel.)

4. L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ? Justifier.

5. On considère l'application $g : E \longrightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par

$$g(P) = P(X+2) - 2P(X) + P(X-2).$$

On admet que g est un endomorphisme de E.
Sans calculer explicitement g, montrer que $\ker(f) \subset \ker(g)$ et comparer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

Solution.

1. Soit $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1) - 2(\lambda P+Q)(X) + (\lambda P+Q)(X-1) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - 2\lambda P(X) - 2Q(X) + \lambda P(X-1) + Q(X-1) \\ &= \lambda(P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)) + Q(X+1) - 2Q(X) + Q(X-1) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

2. a. Par définition,

$$\begin{aligned} P(X+1) &= a(X+1)^4 + b(X+1)^3 + c(X+1)^2 + d(X+1) + e \\ &= a(X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1) + b(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) \\ &\qquad + c(X^2 + 2X + 1) + d(X+1) + e \\ &= aX^4 + (4a+b)X^3 + (6a+3b+c)X^2 + (4a+3b+2c+d)X + a + b + c + d + e \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X+1) = aX^4 + (4a+b)X^3 + (6a+3b+c)X^2 + (4a+3b+2c+d)X + a + b + c + d + e}.$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X-1) &= a(X-1)^4 + b(X-1)^3 + c(X-1)^2 + d(X-1) + e \\ &= a(X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1) + b(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) \\ &\qquad + c(X^2 - 2X + 1) + d(X-1) + e \\ &= aX^4 + (-4a+b)X^3 + (6a-3b+c)X^2 + (-4a+3b-2c+d)X + a - b + c - d + e \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P(X-1) = aX^4 + (-4a+b)X^3 + (6a-3b+c)X^2 + (-4a+3b-2c+d)X + a - b + c - d + e}.$$

b. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(P) &= aX^4 + (4a+b)X^3 + (6a+3b+c)X^2 + (4a+3b+2c+d)X + a + b + c + d + e \\ &\quad - 2(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) \\ &\quad + aX^4 + (-4a+b)X^3 + (6a-3b+c)X^2 + (-4a+3b-2c+d)X + a - b + c - d + e \\ &= 12aX^2 + 6bX + (2a+2c) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f(P) = 12aX^2 + 6bX + 2a + 2c}.$$

c. Ainsi, pour tout $P \in E$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ et donc

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

i.e. $\boxed{\mathrm{rg}(f) \leqslant 3}$.

3. a. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in E$. Alors,

$$f(P) = 0_E \iff 12aX^2 + 6bX + 2a + 2c = 0_E \iff \begin{cases} 12a = 0 \\ 6b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc $\ker(f) = \{dX + e \mid (d, e) \in \mathbb{R}^2\}$ i.e. $\boxed{\ker(f) = \mathbb{R}_1[X]}$.

b. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$ donc, par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 5 - 2$$

i.e. $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 3}$.

c. Par la question précédente, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ et on a vu que $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ donc, par propriété, $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]}$.

4. Comme $\ker(f) \neq \{0_E\}$, $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$ et, comme $\operatorname{Im}(f) \neq E$, $\boxed{f \text{ n'est pas surjectif}}$.
En particulier, $\boxed{f \text{ n'est pas bijectif}}$.

5. Soit $P \in \ker(f)$. Alors, $P \in \mathbb{R}_1[X]$ donc il existe des réels d et e tels que $P = dX + e$. Dès lors,

$$g(P) = P(X+2) - 2P(X) + P(X-2) = d(X+2) + e - 2(dX+e) + d(X-2) + e = 0_E$$

donc $P \in \ker(g)$. Ainsi, $\boxed{\ker(f) \subset \ker(g)}$.
Il s'ensuit que $\dim(\ker(g)) \geqslant \dim(\ker(f))$ donc, par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(g) = \dim(E) - \dim(\ker(g)) \leqslant \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \operatorname{rg}(f).$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f)}$.
Remarque. Il y a en fait égalité car

$$g(X^2) = (X+2)^2 - 2X^2 + (X-2)^2 = X^2 + 4X + 4 - 2X^2 + X^2 - 4X + 4 = 8$$

$$g(X^3) = (X+2)^3 - 2X^3 + (X-2)^3 = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 - 2X^3 + X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = 24X$$

$$\begin{aligned} g(X^4) &= (X+2)^4 - 2X^4 + (X-2)^4 \\ &= X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16 - 2X^4 + X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 16 \\ &= 48X^2 + 32 \end{aligned}$$

Comme $g(X^2)$, $g(X^3)$, $g(X^4)$ ont des degrés différents donc ils forment une famille libre de $\operatorname{Im}(g)$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im}(g)) \geqslant 3$ i.e. $\operatorname{rg}(g) \geqslant \operatorname{rg}(f)$. On conclut donc que $\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f)$.