Devoir à la maison n°4

À rendre le jeudi 19 novembre 2026

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) = P(X+1) - 2P(X) + P(X-1).$$

On admet que f est bien définie i.e. que, pour tout $P \in E$, $f(P) \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in E$ où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$.

- **a.** Déterminer l'expression de $P(X+1)$ et $P(X-1)$ dans la base canonique de E.
- **b.** En déduire l'expression de $f(P)$ dans la base canonique de E.
- **c.** Justifier que $\text{rg}(f) \leqslant 3$.

3.

- **a.** Déterminer $\ker(f)$. (On reconnaîtra un espace vectoriel usuel.)
- **b.** En déduire le rang de f.
- **c.** Déterminer $\text{Im}(f)$. (On reconnaîtra un espace vectoriel usuel.)

4. L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ? Justifier.

5. On considère l'application $g : E \longrightarrow E$ définie pour tout $P \in E$ par

$$g(P) = P(X+2) - 2P(X) + P(X-2).$$

On admet que g est un endomorphisme de E.
Sans calculer explicitement g, montrer que $\ker(f) \subset \ker(g)$ et comparer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.