Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 19 novembre 2025

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$.
On note alors g la réciproque de la fonction

$$f:\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$$

et $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

2. Déterminer $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(1)$.

3. Montrer que

$$\forall x\in[-1\,;1]\,,\quad \cos(g(x))=\sqrt{1-x^2}.$$

4. Montrer que la fonction g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que

$$\forall x\in\,]-1\,;1[\quad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction

$$t\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de g' puis le développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

c. En utilisant la question précédente, déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_g$ et de T au voisinage de l'origine du repère.

6. **a.** Calculer les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire la valeur de $K=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

7. On considère la fonction h définie sur $[-1\,;1]\setminus\{0\}$ par

$$h(x)=\frac{g(x)}{x}.$$

a. Montrer que la fonction h admet un prolongement par continuité en 0 qu'on notera $\tilde{h}$.

b. La fonction $\tilde{h}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 ?

Solution.

1. La fonction sinus est continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) = \cos(x)$. Or, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et, sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, cos ne s'annule qu'en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Par le théorème de la bijection continue, on conclut que sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$.

2. Par définition, pour tout $y \in [-1\,;1]$ et tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x = g(y)$ si et seulement si $y = f(x)$. Ainsi, on en déduit que

- comme $f(0) = \sin(0) = 0$, $\boxed{g(0) = 0}$;
- comme $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\boxed{g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$;
- comme $f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\boxed{g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}}$;
- comme $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\boxed{g(1) = \frac{\pi}{2}}$.

3. Soit $x \in [-1\,;1]$. Pour tout réel t, $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc, en appliquant cela à $t = g(x)$, il vient $\cos^2(g(x)) + \sin^2(g(x)) = 1$. Or, comme g est la bijection réciproque de f, $f(g(x)) = x$ i.e. $\sin(g(x)) = x$ et donc $\sin^2(g(x)) = x^2$. Ainsi, $\cos^2(g(x)) + x^2 = 1$ donc $\cos^2(g(x)) = 1 - x^2$. Étant donné que $x \in [-1\,;1]$, $1 - x^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1-x^2}$ i.e. $|\cos(g(x))| = \sqrt{1-x^2}$. Pour conclure, remarquons que, par définition, $g(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(g(x)) \geqslant 0$ et ainsi $|cos(g(x))| = \cos(g(x))$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1\,;1],\ \cos(g(x)) = \sqrt{1-x^2}}$.

4. Étant donné que f est bijective, strictement croissante et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \cos(x) \neq 0$, par théorème, g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))}$$

donc, par la question précédente,

$$\boxed{\forall x \in]-1\,;1[\,,\quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

5. a. Pour tout réel $t > -1$, $\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \underset{t\to 0}{o}(t)}.$$

b. Comme $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, on déduit de la question précédente que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \underset{x\to 0}{o}(-x^2)$$

i.e.

$$\boxed{g'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}.$$

Par théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que g admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et que

$$g(x) = g(0) + x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Or, on a vu que $g(0) = 0$ donc

$$\boxed{g(x) = x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}.$$

c. Pour tout réel x, $g(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc $\boxed{\text{l'équation réduite de } T \text{ est } y = x}$.

De plus, pour tout réel x, $g(x) - x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $g(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$ donc, au voisinage de 0, $g(x) - x$ a la même signe que $\dfrac{x^3}{6}$. Ainsi, au voisinage de 0, $g(x) - x \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $g(x) - x \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$. On en déduit qu'au voisinage de l'origine, $\mathscr{C}_g$ est en dessous de T pour les abscisses négatives et au-dessus de T pour les abscisses positives.

6. a. On a

$$I = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{1-0^2}\right) = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

donc $\boxed{I = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

De même,

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} g'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_0^{\frac{1}{2}} = g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0)$$

donc, par la question 2., on conclut que $\boxed{J = \dfrac{\pi}{6}}$.

b. Remarquons que

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|1-x|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $1 - x \geqslant 0$ donc

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

et, par linéarité, on conclut que $K = J - I$ i.e. $\boxed{K = \dfrac{\pi}{6} - 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

7. a. On a vu que $g(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc $g(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et ainsi $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par suite, $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. On conclut que h admet une prolongement par continuité en 0 défini par

$$\boxed{\forall x \in [-1\,;1]\,, \quad \tilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}.$$

b. Pour tout $x \in [-1\,;1] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x} &= \frac{\frac{g(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\frac{g(x)-x}{x}}{x} = \frac{g(x) - x}{x^2} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) - x}{x^2} \\ &= \frac{x^2(\frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x))}{x^2} = \frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

donc $\dfrac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{6}$ et ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{6} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\tilde{h} \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \tilde{h}'(0) = 0}$.

c. Pour tout $x \in \,]-1\,;1[\, \setminus \{0\}$,

$$\tilde{h}'(x) = \frac{g'(x)x - g(x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - g(x)}{x^2}$$

et ainsi, d'après les résultats de la question **5.**,

$$\tilde{h}'(x) = \frac{x(1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) - (x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3))}{x^2} = \frac{x^2(\frac{x}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x))}{x^2} = \frac{x}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Dès lors, $\tilde{h}'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \tilde{h}'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \tilde{h}'(x) = \tilde{h}'(0)$. On conclut donc que $\tilde{h}'$ est continue en 0 donc $\boxed{\tilde{h} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0}$.