Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 19 novembre 2025

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$.
On note alors g la réciproque de la fonction

$$f:\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$$

et $\mathscr{C}_g$ la courbe de g dans un repère du plan.

2. Déterminer $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(1)$.

3. Montrer que

$$\forall x \in [-1\,;1]\,,\quad \cos(g(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

4. Montrer que la fonction g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. a. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de g' puis le développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

c. En utilisant la question précédente, déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_g$ et de T au voisinage de l'origine du repère.

6. a. Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

7. On considère la fonction h définie sur $[-1\,;1] \setminus \{0\}$ par

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

a. Montrer que la fonction h admet un prolongement par continuité en 0 qu'on notera $\tilde{h}$.

b. La fonction $\tilde{h}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 ?