Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 20 novembre 2024

Le but de ce devoir est de démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Soit $t \in]0\,;\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En utilisant les formules de duplication, démontrer que, pour tous réels a et b,

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)).$$

b. Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1}$$

et en déduire, à l'aide des formules d'Euler, que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

c. Conclure que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

2. On considère la fonction h définie sur $[0\,;\pi]$ par

$$\forall t \in [0\,;\pi] \quad h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$$

et la fonction φ définie sur $[0\,;\pi]$ par

$$\forall t \in [0\,;\pi] \quad \varphi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Justifier que φ est continue sur $]0\,;\pi]$ puis, en utilisant des équivalents, montrer que φ est continue en 0.

b. Justifier qu'au voisinage de 0, $2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) = t + o(t^2)$ et en déduire que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2\pi}$.

c. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;\pi]$ et calculer, pour tout $t \in]0\,;\pi]$, $\varphi'(t)$.

d. Justifier qu'au voisinage de 0

$$2\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)=-t+\frac{t^2}{\pi}+o(t^2) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=-t+\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).$$

e. Conclure que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$.

3. a. En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que, pour tout $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=1}^n h(t)\cos(kt)=\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}h(t).$$

On veillera à justifier que cette égalité est vraie en $t=0$.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}=\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{6}.$$

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{2n+1}\left[-1+\int_0^\pi \varphi'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right].$$

e. Justifier qu'il existe un réel M tel que, pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $|\varphi'(t)| \leqslant M$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2(1+\pi M)}{2n+1}.$$

f. Conclure.