Corrigé du devoir à la maison n°4

Exercice 1. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de φ puis le rang de φ.
Indication. Pour déterminer le noyau, considérer $P \in \mathbb{R}_3[X]$, écrire P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec a, b, c et d des réels et chercher à quelles conditions P appartient à $\ker \varphi$.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q = P + P'$.

Solution.

1. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda P+Q+(\lambda P+Q)' = \lambda P+Q+\lambda P'+Q' = \lambda(P+P')+(Q+Q') = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors, il existe des réels a, b, c et d tels que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Dès lors,

$$\begin{aligned} P \in \ker\varphi &\iff P + P' = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \iff aX^3 + bX^2 + cX + d + 3aX^2 + 2bX + c = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff aX^3 + (b+3a)X^2 + (c+2b)X + d + c = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b + 3a = 0 \\ c + 2b = 0 \\ d + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\ker\varphi = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}}$.
Dès lors, $\dim(\ker\varphi) = 0$ donc, par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\ker\varphi) = 4 - 0$ i.e. $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 4}$.

3. Comme φ est un endomorphisme de rang 4 d'un espace vectoriel de dimension 4, *varphi* est une isomorphisme. En particulier, φ est bijective donc, pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q = \varphi(P)$.
Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout } Q \in \mathbb{R}_3[X], \text{ il existe un unique } P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q = P + P'}$.

Exercice 2.

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;1[$ par

$$g(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(1+x).$$

   a. Calculer $g(0)$.

   b. Justifier que g est dérivable sur $[0\,;1[$ et montrer que, pour tout $x \in [0\,;1[$,

$$g'(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x).$$

   c. Justifier que, pour tout $x \in [0\,;1[$, $g'(x) \leqslant 0$ et en déduire les variations de g sur $[0\,;1[$.

   d. Déduire des questions précédentes le signe de g sur $[0\,;1[$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ et

$$\forall x \in \,]0\,;1[\quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}.$$

   a. Justifier que f est continue sur $]0\,;1[$.

   b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

   c. En utilisant les équivalents, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

   d. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et montrer que, pour tout $x \in \,]0\,;1[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-1)[\ln(1-x)]^2}.$$

   e. En déduire les variations de f sur $]0\,;1[$.

   f. Montrer que

$$f(x) = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

   g. Déduire de la question précédente que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. En déduire également une équation de la demi-tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que la position relative de T et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce point.

Solution.

1. **a.** $g(0) = -1 \times \ln(1) - 1 \times \ln(1)$ donc, comme $\ln(1) = 0$, $\boxed{g(0) = 0}$.

   b. La fonction g est dérivable sur $[0\,;1[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln(1-x) + (x-1) \times \frac{-1}{1-x} - \left[1 \times \ln(1+x) + (x+1) \times \frac{1}{1+x}\right] \\ &= 1 \times \ln(1-x) + (x-1) \times \frac{1}{x-1} - \ln(1+x) - 1 \\ &= ln(1-x) + 1 - \ln(1+x) - 1 \end{aligned}$$

   donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1[,\ g'(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x).}$

c. Soit $x \in [0\,;1[$. Alors, comme $x \geqslant 0$, $1-x \leqslant 1$ donc $\ln(1-x) \leqslant 0$. De même, comme $x \geqslant 0$, $1+x \geqslant 1$ donc $\ln(1+x) \geqslant 0$ et ainsi $-\ln(1+x) \leqslant 0$. Dès lors, $g'(x) = \ln(1-x) + (-\ln(1+x))$ est la somme de deux réels négatifs donc $g'(x) \leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1[,\ g'(x) \leqslant 0 \text{ et donc } g \text{ est décroissante sur } [0\,;1[}$.

d. Comme g est décroissante sur $[0\,;1[$, pour tout $x \in [0\,;1[$, $g'(x) \leqslant g(0)$. Or, $g(0) = 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1[,\ g(x) \leqslant 0}$.

2. a. Les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \ln(1-x)$ sont continues sur $]0\,;1[$ comme composées de fonctions dérivables. De plus, $x \longmapsto \ln(1-x)$ ne s'annule pas sur $]0\,;1[$ donc, par quotient, $\boxed{f \text{ est continue sur }]0\,;1[}$.

b. Par continuité de ln en 2, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln(2)$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} 1-x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \ln(1-x) = -\infty$. Par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = 0}$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = f(1)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 1}$.

c. Eu voisinage de 0, $\ln(1+x) \sim x$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$, $\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Par quotient, on en déduit que, au voisinage de 0, $f(x) \sim \dfrac{x}{-x} = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -1}$. Dès lors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

d. La fonction f est dérivable sur $]0\,;1[$ comme quotient et composées de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]0\,;1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{1+x} \times \ln(1-x) - \ln(1+x) \times \dfrac{-1}{1-x}}{[\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{\frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{[\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)\,[\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{(x-1)\ln(1-x)-(1+x)\ln(1+x)}{(x^2-1)\,[\ln(1-x)]^2} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout réel } x \in]0\,;1[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1-x^2)\,[\ln(1-x)]^2}}$.

e. Pour tout $x \in]0\,;1[$, $g(x) \leqslant 0$ d'après la question **1.d.**, $x^2-1 < 0$ et $[\ln(1-x)]^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est croissante sur }]0\,;1[}$.

f. Au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}{x\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} \\
&= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} \\
&= \left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right] \\
&= \left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\
&= \left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&= -1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{f(x) = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$.

g. Ainsi, $f(x) = -1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x) - (-1)}{x} = \frac{x\left(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)\right)}{x} = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 1}$.

Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f nous permet d'affirmer que $\boxed{T \text{ a pour équation } y = -1 + x}$ et que, de plus, au voisinage de 0, le signe de $f(x) - (-1 + x)$ est le signe de $-\frac{1}{2}x^2$ et, par conséquent, $\boxed{\text{au voisinage de } 0,\ \mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } T}$.