Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 1er décembre 2023

Exercice 1. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & P + P' \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer le noyau de φ puis le rang de φ.
Indication. Pour déterminer le noyau, considérer $P \in \mathbb{R}_3[X]$, écrire P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec a, b, c et d des réels et chercher à quelles conditions P appartient à $\ker \varphi$.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q = P + P'$.

Exercice 2.

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;1[$ par

$$g(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(1+x).$$

a. Calculer $g(0)$.

b. Justifier que g est dérivable sur $[0\,;1[$ et montrer que, pour tout $x \in [0\,;1[$,

$$g'(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x).$$

c. Justifier que, pour tout $x \in [0\,;1[$, $g'(x) \leqslant 0$ et en déduire les variations de g sur $[0\,;1[$.

d. Déduire des questions précédentes le signe de g sur $[0\,;1[$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ et

$$\forall x \in]0\,;1[\quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}.$$

a. Justifier que f est continue sur $]0\,;1[$.

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

c. En utilisant les équivalents, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

d. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et montrer que, pour tout $x \in]0\,;1[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-1)[\ln(1-x)]^2}.$$

e. En déduire les variations de f sur $]0\,;1[$.

f. Montrer que

$$f(x) = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

g. Déduire de la question précédente que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. En déduire également une équation de la demi-tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que la position relative de T et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce point.