Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 4 novembre 2026

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
On notera encore f la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$. On notera, de plus, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

2. **a.** À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 en 0 du dénominateur, démontrer que f admet en 0 le développement limité suivant :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

b. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

c. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce point.

3. **a.** Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \neq 0$.

c. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0 de exp, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ et conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (1-x)\mathrm{e}^x - 1$.

a. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $\varphi(0)$ et en déduire que, pour tout réel $x \neq 0$, $\varphi(x) < 0$.

c. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces limites lorsque cela est possible.

e. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$.

a. Démontrer que la fonction g est paire sur $\mathbb{R}$.

b. Quelle conséquence remarquable cela implique-t-il sur les coefficients d'ordre impair supérieurs ou égaux à 3 dans les développements limités de f en 0 ?

6. On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation

$$u_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

b. À l'aide du développement limité de la question **2.a**, déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto \ln(f(x))$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution.

1. Comme $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, par quotient, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, on peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$.

2. **a.** Par propriété, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc $\mathrm{e}^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$.

b. En particulier, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 qui est donné par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$.

c. On en déduit également que l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est $\boxed{y = 1 - \dfrac{1}{2}x}$. De plus, $f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$ donc $f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{12}x^2$. On en déduit que, au voisinage de 0, $f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$ est du signe de $\dfrac{1}{12}x^2$ i.e., au voisinage de 0, $f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$ est positif.

$\boxed{\text{On conclut qu'au voisinage du point d'abscisse 0, } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{T}.}$

3. **a.** La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

b. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (\mathrm{e}^x - 1) - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}}$.

c. Comme $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2))-1}{(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1)^2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-x-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1}{(x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2))^2}$$
$$= \frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2\left(1+\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)}{\left(1+\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}}$.
Dès lors, $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0. On en déduit, en utilisant également la question **a.**, que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

4. a. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et sommes de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = (-1)\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x.$$

Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est le signe de $-x$ i.e. $\varphi'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $\varphi'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant 0$.
De plus, φ' ne s'annule qu'en 0 donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. Ainsi, φ atteint son maximum en 0. Or, $\varphi(0) = (1-0)\mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc, on déduit des variations de φ que $\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 0,\ \varphi(x) < 0}$.

c. On a vu en question **3.b.** que, pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ donc, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $\varphi(x)$ i.e. $f'(x) < 0$. De plus, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ donc, pour tout réel x, $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

d. D'une part, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

D'autre part, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. Or, $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ donc, par quotient, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. Or, par croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, par inverse, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi, par propriété, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$. On déduit de cette dernière limite que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

e. Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) > 0}$.

5. a. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} + \frac{1}{2}x = \frac{2x + x(\mathrm{e}^x-1)}{2(\mathrm{e}^x-1)} = \frac{x(\mathrm{e}^x+1)}{2(\mathrm{e}^x-1)}$$

donc

$$g(-x) = \frac{-x(\mathrm{e}^{-x}+1)}{2(\mathrm{e}^{-x}-1)} = \frac{-x(\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{e}^{x}}{2(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{e}^{x}} = \frac{-x(1+\mathrm{e}^{x})}{2(1-\mathrm{e}^{x})} = \frac{x(\mathrm{e}^{x}+1)}{2(\mathrm{e}^{x}-1)} = g(x).$$

Comme $-0 = 0$, on a aussi $g(-0) = g(0)$ donc, finalement, pour tout réel x, $g(-x) = g(x)$ et ainsi $\boxed{g \text{ est paire}}$.

b. On en déduit que les développements limités de g en 0 ne contiennent que des termes pairs. Or, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}x + g(x)$ donc tous les termes d'ordre impairs supérieurs ou égaux à 3 dans les développements limités de f sont nuls.

6. a. On a vu que, pour tout réel x, $f(x) > 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}$.

b. D'après la question **2.a.**,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

donc, comme $-\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on en déduit en $\boxed{\ln(f(x)) = -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)}$.

c. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que

$$\ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{e}}}$.