Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 4 novembre 2026

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
On notera encore f la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$. On notera, de plus, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

2. **a.** À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 en 0 du dénominateur, démontrer que f admet en 0 le développement limité suivant :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

b. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

c. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce point.

3. **a.** Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \neq 0$.

c. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 en 0 de exp, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ et conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (1-x)\mathrm{e}^x - 1$.

a. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $\varphi(0)$ et en déduire que, pour tout réel $x \neq 0$, $\varphi(x) < 0$.

c. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces limites lorsque cela est possible.

e. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$.

a. Démontrer que la fonction g est paire sur $\mathbb{R}$.

b. Quelle conséquence remarquable cela implique-t-il sur les coefficients d'ordre impair supérieurs ou égaux à 3 du développement limité de f en 0 ?

6. On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation

$$u_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

b. À l'aide du développement limité de la question **2.a**, déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \longmapsto \ln(f(x))$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).