Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 5 novembre 2025

On effectue une suite illimitée de tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées 0 ou 1. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule portant le numéro 0 est $q = 1 - p$. On suppose, de plus, que les tirages sont mutuellement indépendants.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements S_i : « la boule obtenue au i-ème tirage porte le numéro 1 » et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n : « on obtient pour la première fois deux boules numérotées 1 consécutivement au n-ième et au $(n+1)$-ième tirages ».

Ainsi, par exemple, si on obtient les numéros suivants : 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1,... alors les évènements T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6 ne sont pas réalisés car on n'obtient jamais deux 1 consécutifs lors des 7 premiers tirages, T_7 est réalisé car on obtient pour la première fois deux 1 consécutifs au 7-ème et au 8-ème tirage et T_9 n'est pas réalisé car on obtient bien deux 1 consécutifs au 9-ème et 10-ème tirage mais ce n'est pas la première fois que cela se produit.

1. **a.** Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(B_i)$ de l'évènement B_i.

b. Calculer $\mathbf{P}(T_1)$ et $\mathbf{P}(T_2)$ et montrer que $\mathbf{P}(T_3) = p^2 q$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'évènement C_n : « lors des n premiers tirages, on n'obtient jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ».

a. Justifier que $\mathbf{P}(C_0) = \mathbf{P}(C_1) = 1$ puis déterminer $\mathbf{P}(C_2)$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T_{n+2}) = p^2 q \mathbf{P}(C_n)$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$. On note E_n : « on n'obtient pas deux fois consécutivement une boule numérotée 1 entre le deuxième et le n-ème tirages » et F_n : « on n'obtient pas deux fois consécutivement une boule numérotée 1 entre le troisième et le n-ème tirages »

a. Exprimer C_n à l'aide des évènements S_1, S_2, E_n et F_n.

b. En déduire que $\mathbf{P}(C_n) = q\mathbf{P}(C_{n-1}) + pq\mathbf{P}(C_{n-2})$.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T_{n+2}) = q\mathbf{P}(T_{n+1}) + pq\mathbf{P}(T_n).$$

5. On considère l'équation (E) : $x^2 - qx - pq = 0$.

a. Justifier que (E) possède deux solutions réelles que l'on notera r et s avec $r < s$.

b. Soit u une solution de (E). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+2} = qu^{n+1} + pqu^n$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathcal{H}(n) : \text{« } \mathbf{P}(T_n) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2 + 4pq}}(s^n - r^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_{n+1}) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2 + 4pq}}(s^{n+1} - r^{n+1}) \text{ »}$$

est vraie.

Solution.

1. a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $\mathbf{P}(S_i) = \mathbf{P}(S_{i+1}) = p$ et, comme les tirages sont mutuellement indépendants, les évènements S_i et S_{i+1} sont indépendants donc $\mathbf{P}(S_i \cap S_{i+1}) = \mathbf{P}(S_i)\mathbf{P}(S_{i+1}) = p^2$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(B_i) = p^2}$.

b. Par définition, $T_1 = B_1$ donc $\boxed{\mathbf{P}(T_1) = p^2}$. De même, $T_2 = \overline{S_1} \cap B_2$ donc, par indépendance, $\mathbf{P}(T_2) = \mathbf{P}(S_1)\mathbf{P}(B_2)$ donc $\boxed{\mathbf{P}(T_2) = qp^2}$. Enfin,

$$T_3 = (S_1 \cap \overline{S_2} \cap B_3) \cup (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap B_3) = (S_1 \cup \overline{S_1}) \cap \overline{S_2} \cap B_3 = \omega \cap \overline{S_2} \cap B_3 = \overline{S_2} \cap B_3)$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(T_3) = \mathbf{P}(\overline{S_2})\mathbf{P}(B_3) = qp^2$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T_3) = p^2 q}$.

2. a. En 0 ou 1 tirages, on ne peut pas tirer deux boules consécutives portant le numéro 1 donc C_0 et C_1 sont des évènements certains et ainsi $\boxed{\mathbf{P}(C_0) = \mathbf{P}(C_1) = 1}$. Enfin, $C_2 = \overline{B_1}$ donc $\mathbf{P}(C_2) = 1 - p^2$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $T_{n+2} = C_n \cap \overline{S_{n+1}} \cap B_{n+1}$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(T_{n+2}) = \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}(\overline{S_{n+1}})\mathbf{P}(B_{n+2}) = \mathbf{P}(C_n) \times q \times p^2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(T_{n+2}) = p^2 q \mathbf{P}(C_n)}$.

3. a. On peut écrire $\boxed{C_n = (\overline{S_1} \cap E_n) \cup (S_1 \cap \overline{S_2} \cap F_n)}$.

b. Or, cette union est disjointe et les évènements sont indépendants donc

$$\mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}(\overline{S_1} \cap E_n) + \mathbf{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap F_n) = \mathbf{P}(S_1)\mathbf{P}(E_n) + \mathbf{P}(S_1)\mathbf{P}(\overline{S_2})\mathbf{P}(F_n) = q\mathbf{P}(E_n) + pq\mathbf{P}(F_n).$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de ne pas obtenir deux 1 consécutifs en k tirages successifs est la même que la probabilité de ne pas obtenir deux 1 consécutifs lors des k premiers tirages (car les tirages sont indépendants). Ainsi, $\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(C_{n-1})$ et $\mathbf{P}(F_n) = \mathbf{P}(C_{n-2})$. On conclut donc que $\boxed{\mathbf{P}(C_n) = q\mathbf{P}(C_{n-1}) + pq\mathbf{P}(C_{n-2})}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question **2.b.**, $\mathbf{P}(T_{n+2}) = p^2 q \mathbf{P}(C_n)$ donc, grâce à la question **3.b.**,

$$\mathbf{P}(T_{n+2}) = p^2 q \left[q\mathbf{P}(C_{n-1}) + pq\mathbf{P}(C_{n-2})\right] = q\left[p^2 q \mathbf{P}(C_{n-1})\right] + pq\left[pq^2\mathbf{P}(C_{n-2})\right].$$

De plus, toujours d'après la question **2.b.**, $p^2 q\mathbf{P}(C_{n-1}) = \mathbf{P}(T_{n+1})$ et $p^2 q \mathbf{P}(C_{n-2}) = \mathbf{P}(T_n)$.
On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(T_{n+2}) = p\mathbf{P}(T_{n+1}) + pq\mathbf{P}(T_n)}$.

5. a. Le discriminant du trinôme $X^2 - qX - pq$ est $\Delta = (-q)^2 - 4 \times 1 \times (-pq) = q^2 + 4pq > 0$ car $p > 0$ et $q > 0$. Ainsi, l'équation (E) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-q) - \sqrt{p^2 + 4pq}}{2} = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-q) + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2} = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}.$$

De plus, on a bien $r < s$ car $\sqrt{q^2+4pq} > 0$ donc

$$\boxed{r = \frac{q-\sqrt{q^2+4pq}}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{q+\sqrt{q^2+4pq}}{2}}.$$

b. Soit u une solution de (E). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u^2 - pu - pq = 0$ donc $u^2 = pu + pq$ et, en multipliant par u^n, il vient $\boxed{u^{n+2} = pu^{n+1} + pqu^n}$.

c. Initialisation. On a vu que $\mathbf{P}(T_1) = p^2$ et $\mathbf{P}(T_2) = p^2q$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^1 - r^1) &= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}\left[\frac{q+\sqrt{q^2+4pq}}{2} - \frac{q-\sqrt{q^2+4pq}}{2}\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}} \times \sqrt{q^2+4pq} = p^2
\end{aligned}$$

et

$$\frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^2 - r^2) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}} \times q\sqrt{q^2+4pq} = p^2q$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors,

$$\mathbf{P}(T_n) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^n - r^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_{n+1}) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^{n+1} - r^{n+1})$$

donc, d'après la question **4.**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_{n+2}) &= q \times \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^{n+1} - r^{n+1}) + pq \times \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^n - r^n) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}\left[q(s^{n+1} - r^{n+1}) + pq(s^n - r^n)\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}\left[qs^{n+1} + pqs^n - (r^{n+1} + pqr^n)\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}\left[s^{n+2} - r^{n+2}\right]
\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la question **5.c.** puisque s et r sont des racines de (E). Ainsi, comme $\mathcal{H}(n)$ est vraie,

$$\mathbf{P}(T_{n+1}) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^{n+1} - r^{n+1})$$

et, de plus, on vient de montrer que

$$\mathbf{P}(T_{n+2}) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^{n+2} - r^{n+2})$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\mathcal{H}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.