Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 5 novembre 2025

On effectue une suite illimitée de tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées 0 ou 1. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule portant le numéro 0 est $q = 1 - p$. On suppose, de plus, que les tirages sont mutuellement indépendants.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements S_i : « la boule obtenue au i-ème tirage porte le numéro 1 » et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n : « on obtient pour la première fois deux boules numérotées 1 consécutivement au n-ième et au $(n+1)$-ième tirages ».

Ainsi, par exemple, si on obtient les numéros suivants : 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1,... alors les évènements T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6 ne sont pas réalisés car on n'obtient jamais deux 1 consécutifs lors des 7 premiers tirages, T_7 est réalisé car on obtient pour la première fois deux 1 consécutifs au 7-ème et au 8-ème tirage et T_9 n'est pas réalisé car on obtient bien deux 1 consécutifs au 9-ème et 10-ème tirage mais ce n'est pas la première fois que cela se produit.

1. **a.** Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(B_i)$ de l'évènement B_i.

b. Calculer $\mathbf{P}(T_1)$ et $\mathbf{P}(T_2)$ et montrer que $\mathbf{P}(T_3) = p^2q$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'évènement C_n : « lors des n premiers tirages, on n'obtient jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ».

a. Justifier que $\mathbf{P}(C_0) = \mathbf{P}(C_1) = 1$ puis déterminer $\mathbf{P}(C_2)$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T_{n+2}) = p^2q\mathbf{P}(C_n)$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$. On note E_n : « on n'obtient pas deux fois consécutivement une boule numérotée 1 entre le deuxième et le n-ème tirages » et F_n : « on n'obtient pas deux fois consécutivement une boule numérotée 1 entre le troisième et le n-ème tirages »

a. Exprimer C_n à l'aide des évènements S_1, S_2, E_n et F_n.

b. En déduire que $\mathbf{P}(C_n) = q\mathbf{P}(C_{n-1}) + pq\mathbf{P}(C_{n-2})$.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T_{n+2}) = q\mathbf{P}(T_{n+1}) + pq\mathbf{P}(T_n).$$

5. On considère l'équation (E) : $x^2 - qx - pq = 0$.

a. Justifier que (E) possède deux solutions réelles que l'on notera r et s avec $r < s$.

b. Soit u une solution de (E). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+2} = qu^{n+1} + pqu^n$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathcal{H}(n) : « \ \mathbf{P}(T_n) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^n - r^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_{n+1}) = \frac{p^2}{\sqrt{q^2+4pq}}(s^{n+1} - r^{n+1}) \ »$$

est vraie.