Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 6 novembre 2024

Première partie

Deux tireurs J_1 et J_2 disputent une partie selon les règles suivantes : J_1 et J_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce qu'un des deux la touche. De plus, J_1 tire en premier.

Soit $i \in \{1, 2\}$. À chaque tentative, la probabilité que le tireur J_i touche la cible est égale à $p_i \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_i = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, J_1 effectue les tirs de rangs impairs et J_2 les tirs de rang pairs.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « la cible est atteinte au k-ième tir ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que la probabilité de A_{2n+1} est égale à $p_1(q_1q_2)^n$.
- **b.** Montrer que la probabilité de A_{2n+2} est égale à $q_1p_2(q_1q_2)^n$.

2. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note G_i : « le joueur J_i remporte la partie ».

- **a.** Justifier que $\mathbf{P}(G_1) = p_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n$ et que $\mathbf{P}(G_2) = q_1p_2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n$.
- **b.** En déduire que $\mathbf{P}(G_1) = \dfrac{p_1}{1 - q_1q_2}$ et que $\mathbf{P}(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1 - q_1q_2}$.
- **c.** Montrer que la partie s'arrête presque sûrement. (On rappelle que $p_1 = 1 - q_1$ et $p_2 = 1 - q_2$.)
- **d.** On dit que la partie est équitable si les deux joueurs ont la même probabilité de gagner. Montrer que la partie est équitable si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1 - p_1}$.

Deuxième partie (facultative)

Soit un entier $c \geqslant 2$. On généralise la situation précédente à c tireurs notés J_1, J_2, ..., J_c. Ils disputent la partie selon les mêmes règles : J_1, J_2, ..., J_c tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. Le joueur J_1 tire en premier, le joueur J_2 en deuxième, et ainsi de suite.

Soit $i \in [\![1, c]\!]$. À chaque tentative, la probabilité que le joueur J_i touche la cible est égale à $p_i \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_i = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, le joueur J_i effectue les tirs de rang $cn + i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « la cible est atteinte au n-ième tir ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que la probabilité de A_{cn+1} est égale à $p_1(q_1q_2\cdots q_c)^n$.
- **b.** Soit $i \in [\![2, n]\!]$. Montrer que la probabilité de A_{cn+i} est égale à $p_i(q_1q_2\cdots q_{i-1})(q_1q_2\cdots q_c)^n$.

2. Pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, on note G_i : « le joueur J_i remporte la partie » et on pose $\pi(i) = q_1q_2\cdots q_i$.

Par convention, on pose, de plus, $\pi(0) = 1$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n$ et que, pour tout $i \in [\![2, c]\!]$,

$$\mathbf{P}(G_i) = p_i \pi(i-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n.$$

b. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $\mathbf{P}(G_i) = \dfrac{p_i \pi(i-1)}{1 - \pi(c)}$.

c. Vérifier que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $p_i \pi(i-1) = \pi(i-1) - \pi(i)$ et en déduire que la partie se termine presque sûrement.

d. On dit que la partie est équitable si $\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}(G_2) = \cdots = \mathbf{P}(G_c)$.
Montrer que la partie est équitable si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, c-1]\!]$, $p_{i+1} = \dfrac{p_i}{1 - p_i}$.

3. On suppose, dans cette question, que la partie est équitable.

a. On pose, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $u_i = \dfrac{1}{p_i}$.
Exprimer, pour tout $i \in [\![1, c-1]\!]$, u_{i+1} en fonction de u_i et en déduire, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, une expression de u_i en fonction de u_1.

b. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $p_i = \dfrac{p_1}{1 - (i-1)p_1}$.

c. Conclure que $\pi(c) = 1 - cp_1$.

Troisième partie

On suppose dans cette partie qu'une infinité de tireurs $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'affrontent toujours selon les mêmes règles : J_1, J_2, ..., J_n, ... tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. Le joueur J_1 tire en premier, le joueur J_2 en deuxième, et ainsi de suite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que le joueur J_n touche la cible est égale à $p_n \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_n = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, chaque joueur ne tire qu'une seule fois : le joueur J_1 au premier tir, le joueur J_2 au deuxième, et ainsi de suite.

On conserve les notations utilisées précédemment.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité de l'évènement G_n : « le joueur J_n gagne » est égale à $\pi(n-1)p_n$.

2. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} \pi(n-1)p_n$ converge vers un réel $\lambda \leqslant 1$.

3. Montrer que la suite $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive et en déduire qu'elle converge vers un réel a.

4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(G_n) = \pi(n-1) - \pi(n)$ et en déduire que $\lambda = 1 - a$.

5. En déduire que la partie s'arrête presque sûrement si et seulement si $a = 0$.

6. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ et en déduire la probabilité que la partie s'arrête.

Solution.

Première partie

1. a. Par définition, $A_{2n+1} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}} \cap A_{2n+1}$ donc, par le théorème des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{2n+1}) &= \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n-1}}}(\overline{A_{2n}})\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n}}}(A_{2n+1})\\ &= \underbrace{(q_1q_2)(q_1q_2)\cdots(q_1q_2)}_{n \text{ fois } q_1q_2}\times p_1\\ &= (q_1q_2)^n p_1\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_{2n+1}) = p_1(q_1q_2)^n}$.

b. Par définition, $A_{2n+2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n+1}} \cap A_{2n+2}$ donc, par le théorème des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{2n+2}) &= \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n-1}}}(\overline{A_{2n}})\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n}}}(\overline{A_{2n+1}})\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n+1}}}(A_{2n+2})\\ &= \underbrace{(q_1q_2)(q_1q_2)\cdots(q_1q_2)}_{n \text{ fois } q_1q_2}\times q_1\times p_2\\ &= (q_1q_2)^n q_1p_2\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_{2n+1}) = q_1p_2(q_1q_2)^n}$.

2. a. Par définition, $G_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}$ et les évènements $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles donc $\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(q_1q_2)^n$. Ainsi, par linéarité de la somme, $\boxed{\mathbf{P}(G_1) = p_1\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n}$.

De même, $G_2 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+2}$ et les évènements $(A_{2n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles donc $\mathbf{P}(G_2) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_1p_2(q_1q_2)^n$. Ainsi, par linéarité de la somme, $\boxed{\mathbf{P}(G_2) = q_1p_2\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n}$.

b. Comme $0 < p_1 < 1$, $0 < 1 - p_1 < 1$ i.e. $0 < q_1 < 1$. De même, $0 < q_2 < 1$ donc, par produit, $0 < q_1q_2 < 1$. Ainsi, la série géométrique $\sum (q_1q_2)^n$ converge donc $\mathbf{P}(G_1) = p_1 \times \dfrac{1}{1-q_1q_2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(G_1) = \dfrac{p_1}{1-q_1q_2}}$.

De même, $\mathbf{P}(G_2) = q_1p_2 \times \dfrac{1}{1-q_1q_2}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1-q_1q_2}}$.

c. L'évènement « la partie se termine » est $G_1 \cup G_2$. Or, ces deux évènements sont disjoints donc la probabilité que la partie se termine est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(G_1 \cup G_2) &= \mathbf{P}(G_1) + \mathbf{P}(G_2) \\ &= \frac{p_1}{1-q_1q_2} + \frac{q_2p_1}{1-q_1q_2} \\ &= \frac{p_1+q_1p_2}{1-q_1q_2} \\ &= \frac{1-q_1+q_1(1-q_2)}{1-q_1q_2} \\ &= \frac{1-q_1q_2}{1-q_1q_2} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la partie se termine presque sûrement}}$.

d. La partie est équitable si et seulement si $\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}(G_2)$. Or,

$$\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}(G_2) \iff \frac{p_1}{1-q_1q_2} = \frac{q_1p_2}{1-q_1q_2} \iff p_1 = q_1p_2 \iff p_2 = \frac{p_1}{q_1}.$$

Or, $q_1 = 1 - p_1$ donc $\boxed{\text{la partie est équitable si et seulement si } p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}}$.

Deuxième partie

1. a. Comme précédemment, $A_{cn+1} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{cn}} \cap A_{cn+1}$ donc, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{cn+1}) &= \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{cn-1}}}(\overline{A_{cn}})\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{cn}}}(A_{cn+1}) \\ &= \underbrace{(q_1q_2\cdots q_c)(q_1q_2\cdots q_n)\cdots(q_1q_2\cdots q_c)}_{n \text{ fois } q_1q_2\cdots q_c} p_1\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_{cn+1}) = p_1(q_1q_2\cdots q_c)^n}$.

b. De même, $A_{cn+i} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{cn+i-1}} \cap A_{cn+i}$ donc, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{cn+i}) &= \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{cn+i-2}}}(\overline{A_{cn+i-1}})\mathbf{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{cn+i-1}}}(A_{cn+i}) \\ &= \underbrace{(q_1q_2\cdots q_c)(q_1q_2\cdots q_n)\cdots(q_1q_2\cdots q_c)}_{n \text{ fois } q_1q_2\cdots q_c} \times q_1 \times q_2 \times \cdots q_{i-1} \times p_i\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_{cn+i}) = p_1(q_1q_2\cdots q_{i-1})(q_1q_2\cdots q_c)^n}$.

2. a. Comme précédemment, G_1 est l'union disjointe des évènements $(A_{cn+1})_{n\in\mathbb{N}}$ donc

$$\mathbf{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{cn+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(q_1q_2\cdots q_c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_1\pi(c)^n$$

donc, par linéarité, $\boxed{\mathbf{P}(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n}$.

De même, pour tout $i \in \llbracket 2, c \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(G_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{cn+i}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_i(q_1q_2\cdots q_{i-1})(q_1q_2\cdots q_c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_i\pi(i-1)\pi(c)^n$$

donc, par linéarité, $\boxed{\mathbf{P}(G_i) = p_i\pi(i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\pi(c)^n}$.

b. Avec la convention $\pi(0) = 1$ de l'énoncé, on voit qu'en fait, pour tout $i \in \llbracket 1, c \rrbracket$, $\mathbf{P}(G_i) = p_i\pi(i-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\pi(c)^n$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < p_i < 1$ donc $0 < q_i < 1$ et ainsi $0 < \pi(c) < 1$. Dès lors, la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty}$ converge et $\mathbf{P}(G_i) = p_i\pi(i-1) \times \dfrac{1}{1-\pi(c)}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(G_i) = \dfrac{p_i\pi(i-1)}{1-\pi(c)}}$.

c. Soit $i \in \llbracket 1, c \rrbracket$. Alors, $\pi(i) = q_1q_2\cdots q_{i-1}q_i = \pi(i-1)q_i$ donc

$$\pi(i-1) - \pi(i) = \pi(i-1) - \pi(i-1)q_i = (1-q_i)\pi(i-1)$$

i.e. $\boxed{\pi(i-1) - \pi(i) = p_1\pi(i-1)}$.

La partie se termine si et seulement si l'évènement $\bigcup_{i=1}^{c} G_i$ est réalisé donc, comme il s'agit d'une union disjointe, la probabilité que la partie se termine est

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{c} G_i\right) &= \sum_{i=1}^{c}\mathbf{P}(G_i) = \sum_{i=1}^{c}\frac{p_i\pi(i-1)}{1-\pi(c)} \\
&= \sum_{i=1}^{c}\frac{\pi(i-1)-\pi(i)}{1-\pi(c)} \\
&= \frac{1}{1-\pi(c)}\sum_{i=1}^{c}(\pi(i-1)-\pi(i)) \\
&= \frac{1}{1-\pi(c)}(\pi(0)-\pi(c)) \qquad \text{(par téléscopage)} \\
&= \frac{1}{1-\pi(c)}(1-\pi(c)) = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la partie se termine presque sûrement}}$.

d. La partie est équitable si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, c-1 \rrbracket$, $\dfrac{p_i\pi(i-1)}{1-\pi(c)} = \dfrac{p_{i+1}\pi(i)}{1-\pi(c)}$ ce qui équivaut à $p_i\pi(i-1) = p_{i+1}\pi(i)$. Or, on a vu précédemment que, pour tout $i \in \llbracket 1, c \rrbracket$, $\pi(i) = \pi(i-1)q_i$ donc, la partie est équitable si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, c-1 \rrbracket$, $p_i\pi(i-1) = p_{i+1}\pi(i-1)q_i$. Or, pour tout $k \in \llbracket 1, c \rrbracket$, $q_k > 0$ donc, pour tout $i \in \llbracket 1, c-1 \rrbracket$, $\pi(i-1) > 0$. Ainsi, la partie est équitable si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, c-1 \rrbracket$, $p_i = p_{i+1}q_i = p_{i+1}(1-p_i)$. Comme $p_i < 1$, on conclut finalement que $\boxed{\text{la partie est équitable si et seulement si, pour tout } i \in \llbracket 1, c-1 \rrbracket,\ p_{i+1} = \dfrac{p_i}{1-p_i}}$.

3. a. Soit $i \in [\![1, c-1]\!]$. Alors,
$$u_{i+1} = \frac{1}{p_{i+1}} = \frac{1-p_i}{p_i} = \frac{1}{p_i} - 1 = u_i - 1.$$
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, c-1]\!],\ u_{i+1} = u_i - 1}$.
On en déduit que $(u_i)_{i \in [\![1,c]\!]}$ est une suite arithmétique de raison -1 donc, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $u_i = u_1 + (i-1) \times (-1)$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, c]\!],\ u_i = u_1 - (i-1)}$.

b. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $\dfrac{1}{p_i} = \dfrac{1}{p_1} - (i-1) = \dfrac{1-(i-1)p_1}{p_1}$ et ainsi on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, c]\!],\ p_i = \dfrac{p_1}{1-(i-1)p_1}}$.

c. On déduit de la question précédente que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$,
$$q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{p_1}{1-(i-1)p_1} = \frac{1-(i-1)p_1 - p_1}{1-(i-1)p_1} = \frac{1-ip_1}{1-(i-1)p_1}$$
donc
$$\pi(c) = q_1 q_2 q_3 \cdots q_c = \frac{1-p_1}{1} \times \frac{1-2p_1}{1-p_1} \times \frac{1-3p_1}{1-2p_1} \times \cdots \times \frac{1-cp_1}{1-(c-1)p_1}$$
et, dans ce produit, tous les termes se simplifient sauf le premier numérateur et le dernier dénominateur donc $\pi(c) = \dfrac{1-cp_1}{1}$ i.e. $\boxed{\pi(c) = 1 - cp_1}$.
Remarque. On pouvait en fait montrer directement l'égalité de la manière suivante. D'après la question **2.c.**, $\displaystyle\sum_{i=1}^{c} \mathbf{P}(G_i) = 1$ et, comme le jeu est équitable, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $\mathbf{P}(G_i) = \mathbf{P}(G_1)$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{c} \mathbf{P}(G_1) = 1$ i.e. $c\mathbf{P}(G_1) = 1$ soit finalement $\mathbf{P}(G_1) = \dfrac{1}{c}$. De plus, d'après la question **2.b.**, $\mathbf{P}(G_1) = \dfrac{p_1 \pi(0)}{1-\pi(c)} = \dfrac{p_1}{1-\pi(c)}$ donc $\dfrac{1}{c} = \dfrac{p_1}{1-\pi(c)}$ i.e. $1 - \pi(c) = cp_1$ soit finalement $\boxed{\pi(c) = 1 - cp_1}$.

Troisième partie

1. Le raisonnement est le même qu'à la question **1.** de la **Deuxième partie**, la probabilité de G_n est $\mathbf{P}(G_n) = q_1 q_2 \cdots q_{n-1} p_n$ donc $\boxed{\mathbf{P}(G_n) = \pi(n-1)p_n}$.

2. Les évènements $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(G_n)$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \mathbf{P}(G_n) \text{ converge vers } \lambda = \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \leqslant 1}$.

3. On a justifié précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) > 0$ et $\pi(n+1) = \pi(n) q_{n+1}$. Ainsi, $\dfrac{\pi(n+1)}{\pi(n)} = q_{n+1} < 1$ donc $\boxed{(\pi(n)) \text{ est décroissante et positive}}$. Ainsi, $(\pi(n))$ est décroissant et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, on conclut que $\boxed{(\pi(n)) \text{ converge vers un réel } a \geqslant 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathbf{P}(G_n) = \pi(n-1)p_n = \pi(n-1)(1-q_n) = \pi(n-1) - \pi(n-1)q_n$$

et, comme $\pi(n-1)q_n = \pi(n)$, on conclut que $\boxed{\mathbf{P}(G_n) = \pi(n) - \pi(n-1)}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, par téléscopage,

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(G_n) = \sum_{n=1}^{N} \pi(n-1) - \pi(n) = \pi(0) - \pi(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1-a$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(G_n) = 1-a$. Autrement dit, $\boxed{\lambda = 1-a}$.

5. La partie s'arrête si et seulement l'évènement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ est réalisé donc la probabilité que la partie s'arrête est $\lambda = 1-a$. Ainsi, la partie s'arrête presque sûrement si et seulement si $1-a=1$ i.e. $\boxed{\text{la partie s'arrête si et seulement si } a=0}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ donc

$$q_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\pi(n) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ ».

- **Initialisation.** Par définition, $\pi(0) = 1$ et $\dfrac{0+2}{2(0+1)} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, comme $n+1 \geqslant 1$, $q_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ donc

$$\pi(n+1) = \pi(n)q_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \pi(n) = \frac{n+2}{2(n+1)}}.$$

Ainsi, $\pi(n) \sim \dfrac{n}{2n} \sim \dfrac{1}{2}$ donc $a = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi(n) = \dfrac{1}{2}$. Par suite, $\lambda = 1-a = \dfrac{1}{2}$ donc on conclut que $\boxed{\text{la probabilité que la partie s'arrête est égale à } \dfrac{1}{2}}$.