Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 6 novembre 2024

Première partie

Deux tireurs J_1 et J_2 disputent une partie selon les règles suivantes : J_1 et J_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce qu'un des deux la touche. De plus, J_1 tire en premier.

Soit $i \in \{1, 2\}$. À chaque tentative, la probabilité que le tireur J_i touche la cible est égale à $p_i \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_i = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, J_1 effectue les tirs de rangs impairs et J_2 les tirs de rang pairs.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « la cible est atteinte au k-ième tir ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que la probabilité de A_{2n+1} est égale à $p_1(q_1q_2)^n$.
- **b.** Montrer que la probabilité de A_{2n+2} est égale à $q_1p_2(q_1q_2)^n$.

2. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note G_i : « le joueur J_i remporte la partie ».

- **a.** Justifier que $\mathbf{P}(G_1) = p_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n$ et que $\mathbf{P}(G_2) = q_1p_2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1q_2)^n$.
- **b.** En déduire que $\mathbf{P}(G_1) = \dfrac{p_1}{1 - q_1q_2}$ et que $\mathbf{P}(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1 - q_1q_2}$.
- **c.** Montrer que la partie s'arrête presque sûrement. (On rappelle que $p_1 = 1 - q_1$ et $p_2 = 1 - q_2$.)
- **d.** On dit que la partie est équitable si les deux joueurs ont la même probabilité de gagner. Montrer que la partie est équitable si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1 - p_1}$.

Deuxième partie (facultative)

Soit un entier $c \geqslant 2$. On généralise la situation précédente à c tireurs notés J_1, J_2, ..., J_c. Ils disputent la partie selon les mêmes règles : J_1, J_2, ..., J_c tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. Le joueur J_1 tire en premier, le joueur J_2 en deuxième, et ainsi de suite.

Soit $i \in [\![1, c]\!]$. À chaque tentative, la probabilité que le joueur J_i touche la cible est égale à $p_i \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_i = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, le joueur J_i effectue les tirs de rang $cn + i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « la cible est atteinte au n-ième tir ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que la probabilité de A_{cn+1} est égale à $p_1(q_1q_2 \cdots q_c)^n$.
- **b.** Soit $i \in [\![2, n]\!]$. Montrer que la probabilité de A_{cn+i} est égale à $p_i(q_1q_2 \cdots q_{i-1})(q_1q_2 \cdots q_c)^n$.

2. Pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, on note G_i : « le joueur J_i remporte la partie » et on pose $\pi(i) = q_1q_2 \cdots q_i$.

Par convention, on pose, de plus, $\pi(0) = 1$.

a. Montrer que $\mathbf{P}(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n$ et que, pour tout $i \in [\![2, c]\!]$,

$$\mathbf{P}(G_i) = p_i \pi(i-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n.$$

b. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $\mathbf{P}(G_i) = \dfrac{p_i \pi(i-1)}{1 - \pi(c)}$.

c. Vérifier que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $p_i \pi(i-1) = \pi(i-1) - \pi(i)$ et en déduire que la partie se termine presque sûrement.

d. On dit que la partie est équitable si $\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}(G_2) = \cdots = \mathbf{P}(G_c)$.
Montrer que la partie est équitable si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, c-1]\!]$, $p_{i+1} = \dfrac{p_i}{1 - p_i}$.

3. On suppose, dans cette question, que la partie est équitable.

a. On pose, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $u_i = \dfrac{1}{p_i}$.
Exprimer, pour tout $i \in [\![1, c-1]\!]$, u_{i+1} en fonction de u_i et en déduire, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, une expression de u_i en fonction de u_1.

b. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, c]\!]$, $p_i = \dfrac{p_1}{1 - (i-1)p_1}$.

c. Conclure que $\pi(c) = 1 - cp_1$.

Troisième partie

On suppose dans cette partie qu'une infinité de tireurs $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'affrontent toujours selon les mêmes règles : J_1, J_2, ..., J_n, ... tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. Le joueur J_1 tire en premier, le joueur J_2 en deuxième, et ainsi de suite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que le joueur J_n touche la cible est égale à $p_n \in]0\,;1[$. On note, de plus, $q_n = 1 - p_i$.

On numérote les tirs à partir de 1. Ainsi, chaque joueur ne tire qu'une seule fois : le joueur J_1 au premier tir, le joueur J_2 au deuxième, et ainsi de suite.

On conserve les notations utilisées précédemment.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité de l'évènement G_n : « le joueur J_n gagne » est égale à $\pi(n-1)p_n$.

2. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} \pi(n-1)p_n$ converge vers un réel $\lambda \leqslant 1$.

3. Montrer que la suite $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive et en déduire qu'elle converge vers un réel a.

4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(G_n) = \pi(n-1) - \pi(n)$ et en déduire que $\lambda = 1 - a$.

5. En déduire que la partie s'arrête presque sûrement si et seulement si $a = 0$.

6. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ et en déduire la probabilité que la partie s'arrête.