Corrigé du devoir à la maison n°3

On dispose d'une pièce de monnaie qui, lorsqu'on la lance, amène PILE avec une probabilité $p \in]0\,;1[$ et FACE avec une probabilité $q = 1 - p$.

On lance indéfiniment cette pièce. On suppose que les lancers sont tous indépendants.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'apparation de deux fois le côté PILE de deux façons différentes. Plus précisément, dans la première partie, on s'intéresse à la première apparition du second PILE (non nécessairement consécutivement à l'obtention du premier PILE) et, dans la seconde partie, à l'apparition de deux PILE consécutifs pour la première fois.

Partie A. Première apparition du second PILE

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les évènements :

- A_n : « Obtenir PILE pour la première fois au n-ième lancer » ;
- B_n : « une fois le premier PILE obtenu, on obtient un second PILE au bout de n lancers <u>supplémentaires</u> ».
- C_n : « Obtenir le second PILE au n-ième lancer » ;
- D_n : « Obtenir PILE au n-ième lancer » ;

Ainsi, si les 5 premiers lancers donnent

FACE, FACE, PILE, FACE, PILE

alors les évènements A_3, B_2, C_5, D_3 et D_5 sont réalisés.

1. **a.** Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'évènement A_n en fonction des évènements D_1, D_2, D_3, ..., D_n.

   b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité de A_n en fonction de p, q et n.

2. **a.** Soit i et j deux entiers naturels non nuls. Calculer $P(A_i \cap B_j)$.

   b. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, C_n en fonction de certains des évènements $A_i \cap B_j$.

   c. Déduire de la question précédente que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$P(C_n) = p^2(n-1)q^{n-2}.$$

   d. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n)$ et interpréter le résultat obtenu.

   e. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nP(C_n)$, qui représente le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir PILE pour la seconde fois.

Partie B. Première apparition de deux PILE consécutifs

Désormais, on suppose que la pièce est équilibrée c'est-à-dire que $p = q = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements :

- S_n : « On obtient pour la première fois deux piles consécutifs au n-ième et au $(n+1)$-ième lancers » ;
- U_n : « On n'obtient jamais deux PILE consécutifs lors des n premiers lancers et on obtient PILE au n-ième lancer ».
- V_n : « On n'obtient jamais deux PILE consécutifs lors des n premiers lancers et on obtient FACE au n-ième lancer ».

Ainsi, si aux 8 premiers lancers, on obtient

PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE

alors l'évènement S_7 est réalisé, les évènements U_1, U_5 et U_7 sont réalisés, U_8 n'est pas réalisé et les évènements V_2, V_3, V_4 et V_6 sont réalisés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = P(S_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $v_n = P(V_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, U_n et V_n.

1. **a.** Déterminer, sans justification, pour tout entier $n \geqslant 1$, les probabilités conditionnelles :

$$P(U_{n+1} \mid U_n),\ P(U_{n+1} \mid V_n),\ P(S_n \mid U_n),\ P(S_n \mid V_n),\ P(V_{n+1} \mid U_n) \text{ et } P(V_{n+1} \mid V_n).$$

b. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, U_{n+1}, V_{n+1} et S_n sont inclus dans $U_n \cup V_n$.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n, \quad s_n = \frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

d. Justifier que $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$. En déduire la valeur de s_1, u_2, v_2 et s_2.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n$.

2. On considère l'équation (E) : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a. Sans résoudre (E), montrer que si r est une solution de (E) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2} = \frac{1}{2}r^{n+1} + \frac{1}{4}r^n$.

b. Résoudre (E).

Dans la suite, on note r_1 et r_2 les deux solutions de cette équation, avec $r_1 > r_2$.

3. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^{n} \end{pmatrix}$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions de v_n et de u_n en fonction de r_1, de r_2 et de n et conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \frac{5+\sqrt{5}}{40}r_1^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{40}r_2^{n-1}.$$

Solution.

Partie A

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Obtenir PILE pour la première fois au n-ième lancer signifie qu'aux $n-1$ premiers lancers, on n'a pas obtenu PILE et qu'on a obtenu PILE au n-ième donc $\boxed{A_n = \overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_{n-1}} \cap D_n}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les lancers sont indépendant donc les les évènements D_1, D_2, ..., D_n sont indépendants et ainsi

$$P(A_n) = P(\overline{D_1}) \times P(\overline{D_2}) \times \cdots \times P(\overline{D_{n-1}}) \times P(D_n)$$

   donc $\boxed{P(A_n) = q^{n-1}p}$.

2. **a.** L'évènement $A_i \cap B_j$ signifie qu'on obtient le premier PILE au i-ième lancer et le second PILE j lancers plus tard, c'est-à-dire au $(i+j)$-ième lancer. Ainsi,

$$\boxed{A_i \cap B_j = \overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_{i-1}} \cap D_i \cap \overline{D_{i+1}} \cap \overline{D_{i+2}} \cap \cdots \cap \overline{D_{i+j-1}} \cap D_{i+j}}$$

   Par indépendance, on en déduit que $P(A_i \cap B_j) = q^{i-1} \times p \times q^{j-1} \times p$ c'est-à-dire $\boxed{P(A_i \cap B_j) = p^2 q^{i+j-2}}$.

   b. Soit un entier $n \geqslant 2$. L'évènement C_n est réalisé si et seulement si on obtient un premier PILE lors d'un certain lancer i compris entre 1 et $n-1$ puis un second PILE au n-ième lancer, c'est-à-dire $n-i$ lancers après le premier PILE. Ainsi, $C_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap B_{n-i})$.

   c. Soit un entier $n \geqslant 2$. Les évènements $A_1 \cap B_{n-1}$, $A_2 \cap B_{n-2}$, ..., $A_{n-1} \cap B_1$ sont deux à deux incompatibles (car A_1, A_2, ..., A_{n-1} le sont) donc

$$P(C_n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap B_{n-i}) = \sum_{i=1}^{n-1} p^2 q^{i+(n-i)-2} = \sum_{i=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = p^2 q^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} 1$$

   donc $\boxed{P(C_n) = p^2 (n-1) q^{n-2}}$.

   d. En faisant un changement d'indice et en reconnaissant une série géométrique dérivée une fois, sachant que $0 < q < 1$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) q^{n-2} \underset{j=n-1}{=} p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} = p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} = p^2 \times \frac{1}{p^2}$$

   donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) = 1}.$$

   Comme les évènements C_n sont deux à deux incompatibles, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) = P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} C_n\right)$ donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} C_n\right) = 1$ ce qui signifie que l'évènement « on obtient au moins un second PILE » est un évènement presque sûr.

e. En reconnaissant une série géométrie dérivée deux fois, sachant que $0 < q < 1$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nP(C_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} np^2(n-1)q^{n-2} = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} = p^2 \times \frac{2}{p^3}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} nP(C_n) = \frac{2}{p}}.$$

Partie B

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors, $\boxed{P(U_{n+1} \mid U_n) = 0 \text{ et } P(U_{n+1} \mid V_n) = \frac{1}{2}}$, $\boxed{P(S_n \mid U_n) = \frac{1}{2} \text{ et } P(S_n \mid V_n) = 0}$ et $\boxed{P(V_{n+1} \mid U_n) = \frac{1}{2} \text{ et } P(V_{n+1} \mid V_n) = \frac{1}{2}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $U_n \cup V_n$ est l'évènement « On n'a pas obtenu deux PILE consécutifs lors des n premiers lancers. Or, pour que U_{n+1}, V_{n+1} et S_n se réalisent, il est nécessaire de ne pas avoir obtenu deux PILE lors des n premiers lancers donc $\boxed{U_{n+1}, V_{n+1} \text{ et } S_n \text{ sont inclus dans } U_n \cup V_n}$.

c. On en déduit que $U_{n+1} = U_{n+1} \cap (U_n \cup V_n) = (U_{n+1} \cap U_n) \cup (U_{n+1} \cap V_n)$. Or, comme les évènements U_n et V_n sont incompatibles, il en est de même de $U_{n+1} \cap U_n$ et $U_{n+1} \cap V_n$ donc

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_{n+1} \cap U_n) + P(U_{n+1} \cap V_n) \\ &= P(U_n)P(U_{n+1} \mid U_n) + P(V_n)P(U_{n+1} \mid V_n) \\ &= u_n \times 0 + v_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$.
Par le même raisonnement,

$$P(S_n) = P(S_n \cap U_n) + P(S_n \cap V_n) = P(U_n)P(S_n \mid U_n) + P(V_n)P(S_n \mid V_n)$$

donc $\boxed{s_n = \frac{1}{2}u_n}$. et

$$P(V_{n+1}) = P(V_{n+1} \cap U_n) + P(V_{n+1} \cap V_n) = P(U_n)P(V_{n+1} \mid U_n) + P(V_n)P(V_{n+1} \mid V_n)$$

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)}$.

d. V_1 est l'évènement « Obtenir FACE au premier lancer » donc $\boxed{v_1 = \frac{1}{2}}$ et U_1 est l'évèneemnt « Obtenir PILE au premier lancer » donc $\boxed{u_1 = \frac{1}{2}}$.
On en déduit que $s_1 = \frac{1}{2}u_1$ soit $\boxed{s_1 = \frac{1}{4}}$, $u_2 = \frac{1}{2}v_1$ soit $\boxed{u_2 = \frac{1}{4}}$, $v_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ soit $\boxed{v_2 = \frac{1}{2}}$, $s_2 = \frac{1}{2}u_2$ soit $\boxed{s_2 = \frac{1}{8}}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $v_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_{n+1}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}v_n + v_{n+1})$ donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n}$.

2. **a.** Soit r une solution de (E) et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}$ donc, en multipliant par r^n, il vient $r^2 \times r^n = \frac{1}{2}r \times r^n + \frac{1}{4} \times r^n$ i.e. $\boxed{r^{n+2} = \frac{1}{2}r^{n+1} + \frac{1}{4}r^n}$.

b. Le discriminant du trinôme $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est $\Delta = (-\frac{1}{2})^2 - 4 \times 1 \times (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0$ donc (E) possède deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-(-\frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2 \times 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

et

$$r_2 = \frac{-(-\frac{1}{2}) - \sqrt{\frac{5}{4}}}{2 \times 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4} \,;\, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H_n : « $X_n = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. D'une part, $X_1 = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. D'autre part, comme r_1 et r_2 sont solutions de (E), $r_1^2 = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{4}$ et $r_2^2 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{4}$ donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^2 \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^1 + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{3+\sqrt{5}}{8} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{3-\sqrt{5}}{8} \\ \frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{40} + \frac{(5-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{40} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{80} + \frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{80} \\ \frac{5+5\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{40} + \frac{5-5\sqrt{5}-\sqrt{5}+5}{40} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{80} + \frac{15-5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5}{80} \\ \frac{10+6\sqrt{5}+10-6\sqrt{5}}{40} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{20+8\sqrt{5}+20-8\sqrt{5}}{80} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc H_1 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = AX_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n}\right) \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{2} r_1^{n+1} + \frac{1}{4} r_1^{n}\right) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1}{2} r_2^{n+1} + \frac{1}{4} r_2^{n}\right) \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 2., $\frac{1}{2} r_1^{n+1} + \frac{1}{4} r_1^{n} = r_1^{n+2}$ et $\frac{1}{2} r_2^{n+1} + \frac{1}{4} r_2^{n} = r_2^{n+2}$ donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+2} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+2} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1} \end{pmatrix}$ i.e. H_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n} \end{pmatrix}$.

c. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} r_2^{n}}$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n = \frac{5+\sqrt{5}}{20} r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{20} r_2^{n}$ donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{20} r_1^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{20} r_2^{n-1}$. De plus, $\frac{5+\sqrt{5}}{20} r_1^{1-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{20} r_2^{1-1} = \frac{5+\sqrt{5}}{20} + \frac{5-\sqrt{5}}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = u_1$ donc l'égalité reste vraie pour $n = 1$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{20} r_1^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{20} r_2^{n-1}}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \frac{1}{2} u_n$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \frac{5+\sqrt{5}}{40} r_1^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{40} r_2^{n-1}}$.