Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 8 novembre 2023

On dispose d'une pièce de monnaie qui, lorsqu'on la lance, amène PILE avec une probabilité $p \in]0\,;1[$ et FACE avec une probabilité $q = 1 - p$.

On lance indéfiniment cette pièce. On suppose que les lancers sont indépendants.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'apparation de deux fois le côté PILE de deux façons différentes. Plus précisément, dans la première partie, on s'intéresse à la première apparition du second PILE (non nécessairement consécutivement à l'obtention du premier PILE) et, dans la seconde partie, à l'apparition de deux PILE consécutifs pour la première fois.

Partie A. Première apparition du second PILE

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les évènements :

- A_n : « Obtenir PILE pour la première fois au n-ième lancer » ;
- B_n : « une fois le premier PILE obtenu, on obtient un second PILE au bout de n lancers supplémentaires ».
- C_n : « Obtenir le second PILE au n-ième lancer » ;
- D_n : « Obtenir PILE au n-ième lancer » ;

Ainsi, si les 5 premiers lancers donnent

FACE, FACE, PILE, FACE, PILE

alors les évènements A_3, B_2, C_5, D_3 et D_5 sont réalisés.

1. **a.** Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'évènement A_n en fonction des évènements D_1, D_2, D_3, ..., D_n.

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité de A_n en fonction de p, q et n.

2. **a.** Soit i et j deux entiers naturels non nuls. Calculer $P(A_i \cap B_j)$.

b. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, C_n en fonction de certains des évènements $A_i \cap B_j$.

c. Déduire de la question précédente que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(C_n) = p^2(n-1)q^{n-2}.$$

d. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n)$ et interpréter le résultat obtenu.

e. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nP(C_n)$, qui représente le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir PILE pour la seconde fois.

Partie B. Première apparition de deux PILE consécutifs

Désormais, on suppose que la pièce est équilibrée c'est-à-dire que $p = q = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements :

- S_n : « On obtient pour la première fois deux piles consécutifs au n-ième et au $(n+1)$-ième lancers » ;
- U_n : « On n'obtient jamais deux PILE consécutifs lors des n premiers lancers et on obtient PILE au n-ième lancer ».
- V_n : « On n'obtient jamais deux PILE consécutifs lors des n premiers lancers et on obtient FACE au n-ième lancer ».

Ainsi, si aux 8 premiers lancers, on obtient

PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE

alors l'évènement S_7 est réalisé, les évènements U_1, U_5 et U_7 sont réalisés, U_8 n'est pas réalisé et les évènements V_2, V_3, V_4 et V_6 sont réalisés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = P(S_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $v_n = P(V_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, U_n et V_n.

1. **a.** Déterminer, sans justification, pour tout entier $n \geqslant 1$, les probabilités conditionnelles :

$$P(U_{n+1} \mid U_n),\ P(U_{n+1} \mid V_n),\ P(S_n \mid U_n),\ P(S_n \mid V_n),\ P(V_{n+1} \mid U_n) \text{ et } P(V_{n+1} \mid V_n).$$

b. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, U_{n+1}, V_{n+1} et S_n sont inclus dans $U_n \cup V_n$.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n, \quad s_n = \frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

d. Justifier que $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de s_1, u_2, v_2 et s_2.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n$.

2. On considère l'équation (E) : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a. Sans résoudre (E), montrer que si r est une solution de (E) alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2} = \frac{1}{2}r^{n+1} + \frac{1}{4}r^n$.

b. Résoudre (E).

Dans la suite, on note r_1 et r_2 les deux solutions de cette équation, avec $r_1 > r_2$.

3. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^{n+1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^{n+1} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}r_1^{n} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}r_2^{n} \end{pmatrix}$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions de v_n et de u_n en fonction de r_1, de r_2 et de n et conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \frac{5+\sqrt{5}}{40}r_1^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{40}r_2^{n-1}.$$