Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 7 octobre 2026

On lance indéfiniment une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de tomber sur *pile* est p et celle de tomber sur *face* est $1-p$ où p est un réel strictement compris entre 0 et 1. On suppose, de plus, que les lancers sont indépendants.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- P_n l'évènement « le n-ième lancer donne *pile* » ;
- F_n l'évènement « le n-ième lancer donne *face* ».

1. On note A l'évènement « on obtient *pile* exactement une fois au cours des trois premiers lancers »

a. Exprimer A comme une union d'évènements deux à deux incompatibles.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A)$.

2. On note B l'évènement « on obtient *pile* au moins une fois au cours des dix premiers lancers ».

a. Exprimer B à l'aide des évènements de la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire une expression de $\overline{B}$ à l'aide des évènements de la suite $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(B)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Exprimer à l'aide des évènements des suites $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ l'évènement

$$C_n : \text{« on obtient } \textit{face} \text{ pour la première fois au } n\text{-ième lancer »}.$$

b. Déterminer $\mathbf{P}(C_n)$.

4. On note C l'évènement « on obtient *face* au moins une fois ».

a. Exprimer C à l'aide des évènements de la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(C)$.

c. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des *pile* ?

5. On note D l'évènement « les deux premiers lancers donnent *pile* et il existe ensuite un lancer donnant *face* ».

a. Exprimer D à l'aide des évènements de la suite $(C_n)_{n\geqslant 3}$.

b. En déduire $\mathbf{P}(D)$.

6. On note E l'évènement « les deux premiers lancers donnent *pile* ».

a. Exprimer E à l'aide des évènements P_1 et P_2.

b. Déterminer $\mathbf{P}(E)$.

c. Comparer $\mathbf{P}(D)$ et $\mathbf{P}(E)$ et expliquer comment, sans les calculer, on aurait pu directement les comparer grâce au résultat de la question **4.**

Solution.

1. a. On peut écrire $\boxed{A = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)}$.

b. Comme les trois évènements $P_1 \cap F_2 \cap F_3$, $F_1 \cap P_2 \cap F_3$ et $F_1 \cap F_2 \cap P_3$ sont deux à deux incompatibles, par définition,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}((P_1 \cap F_2 \cap F_3) + \mathbf{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3)).$$

et donc, par indépendance des lancers,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(F_2)\mathbf{P}(F_3) + \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(P_2)\mathbf{P}(F_3) + \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\mathbf{P}(P_3)\\ &= p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p) + (1-p)^2 p\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{P}(A) = 3p(1-p)^2}$.

2. a. On peut écrire $\boxed{B = \bigcup_{k=1}^{10} P_k}$. Grâce aux lois de de Morgan, on en déduit que

$$\overline{B} = \overline{\bigcup_{k=1}^{10} P_k} = \bigcap_{k=1}^{10} \overline{P_k}$$

i.e. $\boxed{\overline{B} = \bigcap_{k=1}^{10} F_k}$.

b. Par indépendance, on en déduit que

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{10} F_k\right) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\cdots\mathbf{P}(F_{10}) = (1-p)^{10}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = 1 - (1-p)^{10}}$.

3. a. On peut écrire $\boxed{C_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k\right) \cap F_n}$.

b. Par indépendance, on en déduit que

$$\mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} P_k\right) \cap F_n\right) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(P_2)\cdots\mathbf{P}(P_{n-1})\mathbf{P}(F_n)$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(C_n) = p^{n-1}(1-p)}$.

4. a. On peut écrire $\boxed{C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n}$.

b. Comme les évènements de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1}(1-p) = (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = \frac{1-p}{p}\sum_{n=1}^{+\infty} p^n\\ &= \frac{1-p}{p}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} p^n - p^0\right]\end{aligned}$$

et, comme $0 < p < 1$, on reconnaît la somme d'une série géométrique convergente :

$$\mathbf{P}(C) = \frac{1-p}{p}\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) = \frac{1-p}{p}\left(\frac{1}{1-p} - 1\right)$$
$$= \frac{1-p}{p} \times \frac{1-(1-p)}{1-p} = \frac{1-p}{p} \times \frac{p}{1-p}$$

soit finalement $\boxed{\mathbf{P}(C) = 1}$.

c. L'évènement « N'obtenir que des *pile* » est l'évènement $\overline{C}$ et sa probabilité est $\mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbf{P}(C) = 0$ donc $\boxed{\text{la probabilité de n'obtenir que des } \textit{pile} \text{ est nulle}}$.

5. a. On peut écrire $\boxed{D = \bigcup_{n=3}^{+\infty} C_n}$.

b. Comme les évènements de la suite $(C_n)_{n\geqslant 3}$ sont deux à deux incompatibles, on en déduit que

$$\mathbf{P}(D) = \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(D_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}(1-p) = \frac{1-p}{p}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} p^n - (p^0 + p^1 + p^2)\right]$$

donc, comme $0 < p < 1$,

$$\mathbf{P}(D) = \frac{1-p}{p}\left[\frac{1}{1-p} - (1+p+p^2)\right] = \frac{1-p}{p} \times \frac{1-(1+p+p^2)(1-p)}{1-p}$$
$$= \frac{1-(1-p+p-p^2+p^2-p^3)}{p} = \frac{1-(1-p^3)}{p} = \frac{p^3}{p}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(D) = p^2}$.

6. a. On peut écrire $\boxed{E = P_1 \cap P_2}$.

b. Par indépendance, on en déduit que $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(P_2)$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(E) = p^2}$.

c. On constate que $\boxed{\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(E)}$. Ceci était prévisible. En effet, $E = \overline{C} \cup D$ car E se réalise soit si on n'obtient que des *pile* soit si on obtient deux *pile* puis ensuite au moins un *face*. Comme cette réunion est disjointe, on en déduit que $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(\overline{C}) + \mathbf{P}(D)$. et on a vu en question **4.c.** que $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$ donc $\boxed{\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(D)}$.