Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 7 octobre 2026

On lance indéfiniment une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de tomber sur *pile* est p et celle de tomber sur *face* est $1-p$ où p est un réel strictement compris entre 0 et 1. On suppose, de plus, que les lancers sont indépendants.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- P_n l'évènement « le n-ième lancer donne *pile* » ;
- F_n l'évènement « le n-ième lancer donne *face* ».

1. On note A l'évènement « on obtient *pile* exactement une fois au cours des trois premiers lancers »

a. Exprimer A comme une union d'évènements deux à deux incompatibles.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A)$.

2. On note B l'évènement « on obtient *pile* au moins une fois au cours des dix premiers lancers ».

a. Exprimer B à l'aide des évènements de la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire une expression de $\overline{B}$ à l'aide des évènements de la suite $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(B)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Exprimer à l'aide des évènements des suites $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ l'évènement

$$C_n : \text{« on obtient } \textit{face} \text{ pour la première fois au } n\text{-ième lancer »}.$$

b. Déterminer $\mathbf{P}(C_n)$.

4. On note C l'évènement « on obtient *face* au moins une fois ».

a. Exprimer C à l'aide des évènements de la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(C)$.

c. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des *pile* ?

5. On note D l'évènement « les deux premiers lancers donnent *pile* et il existe ensuite un lancer donnant *face* ».

a. Exprimer D à l'aide des évènements de la suite $(C_n)_{n\geqslant 3}$.

b. En déduire $\mathbf{P}(D)$.

6. On note E l'évènement « les deux premiers lancers donnent *pile* ».

a. Exprimer E à l'aide des évènements P_1 et P_2.

b. Déterminer $\mathbf{P}(E)$.

c. Comparer $\mathbf{P}(D)$ et $\mathbf{P}(E)$ et expliquer comment, sans les calculer, on aurait pu directement les comparer grâce au résultat de la question **4.**