Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 8 octobre 2025

1. On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.

b. Étudier, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 et u_2.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de u_n.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

4. **a.** Soit un entier $k \geqslant 2$. Comparer $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1).$$

5. Déduire des questions précédentes que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

6. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Solution.

1. **a.** Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+1)^2 - x \times 2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{x^2+2x+1-(2x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{1-x^2}{(1+x)^4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 0,\ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x)^4}}$.

b. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1+x)^4 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-x^2$. Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ et $1+x > 0$ donc le signe de $1-x^2$ est le signe de $1-x$.

Ainsi, $\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [0\,;1] \text{ et } f'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [1\,;+\infty[}$.

c. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

d. On aboutit donc au tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. **a.** Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(1)$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{4}}$ et $u_2 = \dfrac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4}+1)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{25}{16}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{16}{25}$ i.e. $\boxed{u_2 = \dfrac{4}{25}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ ».

- **Initialisation.** On a vu que $u_1 = \dfrac{1}{4}$ donc $0 < u_1 \leqslant \dfrac{1}{1}$ i.e. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc, comme f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, $f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Or, $f(0) = 0$ et

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+1)^2} = \frac{1}{(\frac{1+n}{n})^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$ donc $\dfrac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ i.e. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}}.$$

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{(u_n) \text{ converge et que } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_n = \frac{1}{\frac{u_n}{(u_n+1)^2}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n + 1 - 1}{u_n} = \frac{u_n(u_n+2)}{u_n} = u_n + 2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 2}$.

b. On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $2 < u_n + 2 \leqslant \dfrac{1}{n} + 2$ et donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}}$.

c. Soit un entier $n \geqslant 2$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{k}$ donc, en sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{k}\right)$$

i.e. par linéarité,

$$2(n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En reconnaissant un téléscopage, il s'ensuit que

$$2(n-1) \leqslant \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leqslant 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or, $u_1 = \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{1}{u_1} = 4$. Dès lors,

$$2(n-1) \leqslant \frac{1}{u_n} - 4 \leqslant 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

donc

$$2(n-1) + 4 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n-1) + 4 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qui permet de conclure que

$$\boxed{2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}.$$

4. **a.** Pour tout $t \in [k-1\,;k]$, $0 <\leqslant t \leqslant k$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t.$$

Or, comme k ne dépend pas de t,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}(k-(k-1)) = \frac{1}{k}$$

et on conclut que

$$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k}}.$$

b. Soit un entier $n \geqslant 3$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 2 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\int_{1}^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n-1} = \ln(n-1) - \ln(1) = \ln(n-1)$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1)}.$$

5. Soit un entier $n \geqslant 3$. On déduit de la question précédent que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n-1).$$

Ainsi, par le résultat de la question **3.c.**,

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + 1 + \ln(n-1)$$

et, en divisant par $2n > 0$, on en déduit que

$$\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{2nu_n} \leqslant \frac{2n+3}{2n} + \frac{\ln(n-1)}{2n}.$$

Or, d'une part, $\frac{n+1}{n} \sim \frac{n}{n} \sim 1$ donc $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'autre part, $\frac{2n+1}{2n} \sim \frac{2n}{2n} \sim 1$ donc $\frac{2n+3}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et

$$\frac{\ln(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2n} \times \frac{\ln(n-1)}{n-1}$$

avec $\frac{n-1}{2n} \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{n-1} = 0$ donc $\frac{2n+3}{2n} + \frac{\ln(n-1)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\dfrac{1}{2nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ i.e. $\dfrac{\frac{1}{2n}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc, par définition, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

6. Par théorème, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc, par linéarité, $\sum \dfrac{1}{2n}$ et ainsi, finalement, par équivalence, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.