Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 8 octobre 2025

1. On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.

b. Étudier, pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 et u_2.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de u_n.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

4. **a.** Soit un entier $k \geqslant 2$. Comparer $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n-1).$$

5. Déduire des questions précédentes que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

6. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.