Devoir à la maison n°2

À rendre le vendredi 04 octobre 2024

Exercice 1. On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de F et en déduire sa dimension.

3. On note $n = (1, 1, 1, 1)$ et $G = \text{Vect}(n)$.

a. Démontrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et en déduire que (e_1, e_2, e_3, n) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Démontrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $v = f + g$.

Solution

1. Comme

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - y - z\} \\ &= \{(x, y, z, -x - y - z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

en posant $e_1 = (1, 0, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $e_3 = (0, 0, 1, -1)$, $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

2. Soit a, b et c des réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = (0, 0, 0, 0)$. Alors,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -a - b - c = 0 \end{cases}$$

donc $a = b = c = 0$. Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une famille libre donc $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } F}$.

On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 3}$.

3. a. Soit $v \in F \cap G$. Alors, comme $v \in G$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $v = kn = (k, k, k, k)$. De plus, comme $v \in F$, par définition, $k + k + k + k = 0$ donc $4k = 0$ i.e. $k = 0$.

Ainsi, $v = 0n$ donc $v = (0, 0, 0, 0)$. Ainsi, $(0, 0, 0, 0)$ est le seul vecteur pouvant appartenir à $F \cap G$. De plus, comme F et G sont des espaces vectoriels, $F \cap G$ est un espace vectoriel donc $(0, 0, 0, 0) \in F \cap G$.

On conclut donc que $\boxed{F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}}$.

Soit a, b, c et d des réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 + dn = (0, 0, 0, 0)$. Alors, $ae_1 + be_2 + ce_3 = -dn$ donc $ae_1 + be_2 + ce_3 \in G$. Or, comme (e_1, e_2, e_3) est une base de F, $ae_1 + be_2 + ce_3 \in F$. Ainsi, $ae_1 + be_2 + ce_3 \in F \cap G$ donc $ae_1 + be_2 + ce_3 = (0, 0, 0, 0)$. Or, (e_1, e_2, e_3) est libre donc $a = b = c = 0$. Par suite, $dn = 0$ donc, comme $n \neq (0, 0, 0, 0)$, $d = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = 0$ donc (e_1, e_2, e_3, n) est une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, on conclut que $\boxed{(e_1, e_2, e_3, n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

b. Soit $v \in \mathbb{R}^4$. On déduit de la question précédente qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 + dn = v$. Posons $f = ae_1 + be_2 + ce_3$ et $g = dn$. Alors, par définition, $f \in F$, $g \in G$ et $v = f + g$.

Supposons qu'il existe $f' \in F$ et $g' \in G$ tels que $v = f' + g$". Alors, $f + g = f' + g$" donc $f - f' = g' - g$. Comme F est un espace vectoriel, $f - f' \in F$ et, comme G est un espace vectoriel, $g' - g \in G$. Ainsi, $f - f' = g' - g$ appartient à $F \cap g$ donc, d'après la question précédente, $f - f' = g' - g = (0, 0, 0, 0)$. Dès lors, $f = f'$ et $g = g'$.

On a donc montré qu' $\boxed{\text{il existe un unique couple } (f, g) \in F \times G \text{ tel que } v = f + g}$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 37 du chapitre 3 i.e. de démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Dans toute la suite, on considère un réel x positif.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. a. Déterminer la limite de (u_n) dans le cas où $x = 0$.
On suppose, dans les questions **b.**, **c.** et **d.** que $x \neq 0$.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$.

c. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}.$$

d. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant une intégration par parties, démontrer que

$$I_k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - I_n.$$

4. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{n!}(\mathrm{e}^x - 1)$.

b. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Conclure.

Solution.

1. a. Si $x = 0$ alors $u_0 = 1$ mais, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{x^n \times x}{n!(n+1)} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant N,\ u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}$ ».

- **Initialisation.** Comme $\frac{2^N u_N}{2^N} = u_N$, on a bien $u_N \leqslant \frac{2^N u_N}{u_N}$ donc $\mathcal{P}(N)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit un entier $n \geqslant N$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}$ donc, en multipliant par $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{u_n}{2} \leqslant \frac{2^N u_N}{2^{n+1}}$ et ainsi, d'après le résultat de la question **c.**, $u_{n+1} \leqslant \frac{2^N u_N}{2^{n+1}}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant N, \quad u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}}.$$

d. Comme $x > 0$, pour tout entier n, $x^n > 0$ donc $u_n > 0$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, $0 < u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}$. Or, comme $2 > 1$, lim $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et donc, comme $2^N u_N$ est une constante, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^N u_N}{2^n} = 0$.

Par le théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. Considérons les fonctions $f : t \longmapsto -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}$ et $g : t \longmapsto \mathrm{e}^t$ définie sur $[0\,;x]$. Alors, f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;x]$ et, pour tout $t \in [0\,;x]$, $f'(t) = (x-t)^n$ et $g'(t) = \mathrm{e}^t$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k!}\left(\left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1}\int_0^x (x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{x^{k+1}}{k!(k+1)} + \frac{1}{k!(k+1)}\int_0^x (x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et, comme $k!(k+1) = (k+1)!$, on conclut que

$$\boxed{I_k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{j=k-1}{=} 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!}$$

et, d'après la question précédente, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x^{j+1}}{(j+1)!} = I_j - I_{j+1}$ donc, par téléscopage,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} (I_j - I_{j+1}) = 1 + I_0 - I_n.$$

Or,

$$I_0 = \frac{1}{0!} \int_0^x (x-t)^0 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{1} \int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - e^0 = \mathrm{e}^x - 1$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \mathrm{e}^x - 1 - I_n$ soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - I_n}.$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0\,;x]$, $x - t \geqslant 0$ donc $(x-t)^n \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^t > 0$ donc $(x-t)^n \mathrm{e}^t \geqslant 0$. Ainsi, comme $x \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
De plus, pour tout $t \in [0\,;x]$, $0 \leqslant x - t \leqslant x$ donc, par croissance de la fonction $s \longmapsto s^n$ sur $[0\,;+\infty[$, $(x-t)^n \leqslant x^n$ et ainsi, comme $\mathrm{e}^t > 0$, $(x-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant x^n \mathrm{e}^t$. Comme $x \geqslant 0$, on en déduit, par croissance puis linéarité de l'intégrale, que

$$I_n \leqslant \frac{1}{n!} \int_0^x x^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n!} \int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{n!} I_0$$

et ainsi $I_n \leqslant \dfrac{x^n}{n!}(\mathrm{e}^x - 1)$.

On a donc montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^n}{n!}(\mathrm{e}^x - 1)}$.

b. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant u_n(\mathrm{e}^x - 1)$ et, d'après le résultat de la question **1.**, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Or, $\mathrm{e}^x - 1$ ne dépend pas de n donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(\mathrm{e}^x - 1) = 0$. Par le théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

c. Par somme de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^x - I_n = \mathrm{e}^x$ i.e. d'après le résultat de la question **3.**, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} = \mathrm{e}^x$. Ainsi, par définition, la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x}.$$