Devoir à la maison n°2

À rendre le vendredi 04 octobre 2024

Exercice 1. On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de F et en déduire sa dimension.

3. On note $n = (1, 1, 1, 1)$ et $G = \text{Vect}(n)$.

a. Démontrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et en déduire que (e_1, e_2, e_3, n) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Démontrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $v = f + g$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 37 du chapitre 3 i.e. de démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Dans toute la suite, on considère un réel x positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. a. Déterminer la limite de (u_n) dans le cas où $x = 0$.

On suppose, dans les questions **b.**, **c.** et **d.** que $x \neq 0$.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$.

c. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$u_n \leqslant \frac{2^N u_N}{2^n}.$$

d. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant une intégration par parties, démontrer que

$$I_k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + I_{k+1}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x - I_n.$$

4. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{n!}(\mathrm{e}^x - 1)$.

b. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Conclure.